Stacks Algebraicos.

Osbaldo Mata Gutiérrez.

EGA 2015.

En general, cuando presentamos algún objeto matemático lo hacemos acompañar de sus funciones.

En general, cuando presentamos algún objeto matemático lo hacemos acompañar de sus funciones.

1. Espacios Topológicos $\mapsto$ funciones continuas

En general, cuando presentamos algún objeto matemático lo hacemos acompañar de sus funciones.

1. Espacios Topológicos $\mapsto$ funciones continuas
2. Grupos $\mapsto$ homomorfismos de grupos

En general, cuando presentamos algún objeto matemático lo hacemos acompañar de sus funciones.

1. Espacios Topológicos $\mapsto$ funciones continuas
2. Grupos $\mapsto$ homomorfismos de grupos
3. Anillos $\mapsto$ homomorfismos de anillos

En general, cuando presentamos algún objeto matemático lo hacemos acompañar de sus funciones.

1. Espacios Topológicos $\mapsto$ funciones continuas
2. Grupos $\mapsto$ homomorfismos de grupos
3. Anillos $\mapsto$ homomorfismos de anillos
4. Variedades $\mapsto$ Morfismos de variedades
5. Esquemas $\mapsto$ Morfismos de Esquemas.

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Si X, Y, Z son objetos (de los anteriores) entonces

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Si X, Y, Z son objetos (de los anteriores) entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Si X, Y, Z son objetos (de los anteriores) entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

1. $id_Y : Y \to Y$, para todo objeto.

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Si X, Y, Z son objetos (de los anteriores) entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

1. $id_Y : Y \to Y$, para todo objeto.
2. Si la composición está bien definida, entonces $id_Y \circ f = f$ y $g \circ id_Y = g$.

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Si X, Y, Z son objetos (de los anteriores) entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

1. $id_Y : Y \to Y$, para todo objeto.
2. Si la composición está bien definida, entonces $id_Y \circ f = f$ y $g \circ id_Y = g$.

Esto determina una **Categoría**.

$$Top, Grps, Var, Aff, Sch, Rings, Sets,$$

Entre líneas observamos que cumplen las siguientes propiedades:

Si X, Y, Z son objetos (de los anteriores) entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

1. $id_Y : Y \to Y$, para todo objeto.
2. Si la composición está bien definida, entonces $id_Y \circ f = f$ y $g \circ id_Y = g$.

Esto determina una **Categoría**.

$$Top, Grps, Var, Aff, Sch, Rings, Sets, Cat$$

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un funtor es un morfismo de categorías

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un funtor es un morfismo de categorías

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

Mas aún, podemos definir subcategorías, esto es:

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un funtor es un morfismo de categorías

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

Mas aún, podemos definir subcategorías, esto es:
Una categoría $\mathcal{C}_1$ es una subcategoría de $\mathcal{C}_2$ tal que
Los objetos (y morfismos) de $\mathcal{C}_1$ son objetos (y morfismos) de $\mathcal{C}_2$.

$$Var \subset Aff$$

En Geometría Algebraica los problemas de clasificación tienen este lenguaje.

En Geometría Algebraica los problemas de clasificación tienen este lenguaje.

Problemas Moduli

Ingredientes para un **problema moduli**:

Ingredientes para un **problema moduli**:

1. Una Colección de Objetos $\mathcal{A}$.

Ingredientes para un **problema moduli**:

1. Una Colección de Objetos $\mathcal{A}$.
2. Una relación de equivalencia entre los objetos.

Ingredientes para un **problema moduli**:

1. Una Colección de Objetos $\mathcal{A}$.
2. Una relación de equivalencia entre los objetos.
3. Un concepto de familia.

Ingredientes para un **problema moduli**:

1. Una Colección de Objetos $\mathcal{A}$.
2. Una relación de equivalencia entre los objetos.
3. Un concepto de familia.
4. Una relación de equivalencia entre familias.

La solución a un problema moduli:

La solución a un problema moduli:
Espacio Moduli (M)

La solución a un problema moduli:

Espacio Moduli (M)

Un espacio moduli es una variedad M que "clasifica bien" una colección de objetos y sus familias.

La solución a un problema moduli:

Espacio Moduli (M)

Un espacio moduli es una variedad M que "clasifica bien" una colección de objetos y sus familias.

1. Clasifique los objetos por completo y sin repetición.

La solución a un problema moduli:

Espacio Moduli (M)

Un espacio moduli es una variedad M que “clasifica bien” una colección de objetos y sus familias.

1. Clasifique los objetos por completo y sin repetición.

$$(\mathcal{A}/\sim) \cong M$$

La solución a un problema moduli:

Espacio Moduli (M)

Un espacio moduli es una variedad M que "clasifica bien" una colección de objetos y sus familias.

1. Clasifique los objetos por completo y sin repetición.

$$(\mathcal{A}/\sim) \cong M$$

2. Clasifique a todas las familias y codifique su información sin repetición.

La solución a un problema moduli:

Espacio Moduli (M)

Un espacio moduli es una variedad M que "clasifica bien" una colección de objetos y sus familias.

1. Clasifique los objetos por completo y sin repetición.

$$(\mathcal{A}/\sim) \cong M$$

2. Clasifique a todas las familias y codifique su información sin repetición.

$$(\{Familias\ parametrizadas\ por\ X\}/\sim) \cong Hom(X, M)$$

Las familias parametrizadas están en correspondencia biyectiva con los morfismos de clasificación.

Definición (Funtorial)

Un problema moduli es un funtor contravariante

$$\mathcal{M} : (Var)^{op} \to Sets$$

Definición (Funtorial)

Un problema moduli es un funtor contravariante

$$\mathcal{M} : (Var)^{op} \rightarrow Sets$$

$$X \mapsto \{Familias\ parametrizadas\ por\ X\}/\sim$$

Definición (Funtorial)

Un problema moduli es un funtor contravariante

$$\mathcal{M} : (Var)^{op} \to Sets$$

$$X \mapsto \{Familias\ parametrizadas\ por\ X\}/\sim$$

Un espacio moduli para $\mathcal{M}$, es

Definición (Funtorial)

Un problema moduli es un funtor contravariante

$$\mathcal{M} : (Var)^{op} \to Sets$$

$$X \mapsto \{Familias\ parametrizadas\ por\ X\}/\sim$$

Un espacio moduli para $\mathcal{M}$*, es un funtor* h_M *tal que*

Definición (Funtorial)

Un problema moduli es un funtor contravariante

$$\mathcal{M} : (Var)^{op} \to Sets$$

$$X \mapsto \{Familias\ parametrizadas\ por\ X\}/\sim$$

Un espacio moduli para $\mathcal{M}$, es un funtor h_M tal que

$$h_M : (Aff)^{op} \to Sets$$

$$T \mapsto Hom(T, M)$$

es equivalente a $\mathcal{M}$. Esto produce una pareja (U, M).

Grothendieck desarrolla la idea de que los objetos geométricos como las variedades y esquemas pueden expresarse como un "sistema".

Grothendieck desarrolla la idea de que los objetos geométricos como las variedades y esquemas pueden expresarse como un "sistema".

$$\textit{Variedad} \rightarrow \textit{Funtor}$$

Ejemplo:
Fijemos un campo base k y consideremos la variedad V definida por ecuación $y^3 = x^2$.

Ejemplo:

Fijemos un campo base k y consideremos la variedad V definida por ecuación $y^3 = x^2$.

En lugar de considerar anillos, tomamos las k-álgebras de tipo finito

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]/I.$$

Ejemplo:
Fijemos un campo base k y consideremos la variedad V definida por ecuación $y^3 = x^2$.
En lugar de considerar anillos, tomamos las k-álgebras de tipo finito

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]/I.$$

Entonces a cada k-álgebra finitamente generada, le asociamos un funtor covariante

$$h_V : (\frac{Alg_k}{fin.gen.}) \longrightarrow Sets,$$

Ejemplo:
Fijemos un campo base k y consideremos la variedad V definida por ecuación $y^3 = x^2$.
En lugar de considerar anillos, tomamos las k-álgebras de tipo finito

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]/I.$$

Entonces a cada k-álgebra finitamente generada, le asociamos un funtor covariante

$$h_V : \left(\frac{Alg_k}{fin.gen.}\right) \longrightarrow Sets,$$

$$A \mapsto$$

Ejemplo:
Fijemos un campo base k y consideremos la variedad V definida por ecuación $y^3 = x^2$.
En lugar de considerar anillos, tomamos las k-álgebras de tipo finito

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]/I.$$

Entonces a cada k-álgebra finitamente generada, le asociamos un funtor covariante

$$h_V : (\frac{Alg_k}{fin.gen.}) \longrightarrow Sets,$$

$$A \mapsto \{(x, y) \in A^2 | y^3 = x^2\}.$$

De esta manera tenenemos que si B es una k-álgebra y $\phi : A \to B$ un homomorfismo de k-álgebras, entonces

De esta manera tenenemos que si B es una k-álgebra y $\phi : A \to B$ un homomorfismo de k-álgebras, entonces

$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & \{(x,y) \in A^2 | y^2 = x^3\} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi^*} \\ B & \mapsto & \{(x,y) \in B^2 | y^2 = x^3\} \end{array}$$

De esta manera tenenemos que si B es una k-álgebra y $\phi : A \to B$ un homomorfismo de k-álgebras, entonces

$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & \{(x,y) \in A^2 | y^2 = x^3\} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} \\ B & \mapsto & \{(x,y) \in B^2 | y^2 = x^3\} \end{array}$$

La variedad es un "sistema" de soluciones.

De esta manera tenenemos que si B es una k-álgebra y $\phi : A \to B$ un homomorfismo de k-álgebras, entonces

$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & \{(x,y) \in A^2 | y^2 = x^3\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\phi^*} \\ B & \mapsto & \{(x,y) \in B^2 | y^2 = x^3\} \end{array}$$

La variedad es un "sistema" de soluciones.
Observar este sistema de soluciones equivale al estudio del funtor.

Siguiendo el punto de vista anterior, podemos hacer una identificación entre cualquier variedad V y su funtor h_V.

Siguiendo el punto de vista anterior, podemos hacer una identificación entre cualquier variedad V y su funtor h_V.

Lema

El funtor covariante

$$H : Var_{/Aff} \to Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$$

$$V \mapsto h_V$$

Siguiendo el punto de vista anterior, podemos hacer una identificación entre cualquier variedad V y su funtor h_V.

Lema

El funtor covariante

$$H : Var_{/Aff} \to Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$$

$$V \mapsto h_V$$

*es completamente fiel.**

Siguiendo el punto de vista anterior, podemos hacer una identificación entre cualquier variedad V y su funtor h_V.

Lema

El funtor covariante

$$H : Var_{/Aff} \to Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$$

$$V \mapsto h_V$$

*es completamente fiel.**

A partir de ahora pensaremos en la categoría Var_{Aff} como una subcategoría de $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$.

Siguiendo el punto de vista anterior, podemos hacer una identificación entre cualquier variedad V y su funtor h_V.

Lema

El funtor covariante

$$H : Var_{/Aff} \to Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$$

$$V \mapsto h_V$$

*es completamente fiel.**

A partir de ahora pensaremos en la categoría Var_{Aff} como una subcategoría de $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$.
No haremos distinción entre la variedad V y el funtor h_V.

Observe que en realidad la variedad V representa al funtor h_V.

Observe que en realidad la variedad V representa al funtor h_V.

$$h_V(A) = Hom_{Alg_k}(k[V], A)$$

Observe que en realidad la variedad V representa al funtor h_V.

$$h_V(A) = Hom_{Alg_k}(k[V], A)$$

Si tomamos el anillo de coordenadas de la curva $\frac{k[x,y]}{y^2-x^3}$, entonces para cada k-álgebra A, tendremos

Observe que en realidad la variedad V representa al funtor h_V.

$$h_V(A) = Hom_{Alg_k}(k[V], A)$$

Si tomamos el anillo de coordenadas de la curva $\frac{k[x,y]}{y^2-x^3}$, entonces para cada k-álgebra A, tendremos

$$\{(x, y) \in A^2 | y^2 = x^3\} = Hom_{Alg_k}(k[x, y]/y^2 - x^3, A).*$$

Ahora que hemos encajado la categoría de k-variedades afines en la categoría $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$, Ahora que hemos encajado la categoría de k-variedades afines en la categoría $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$,deseamos ampliar la categoría

Ahora que hemos encajado la categoría de k-variedades afines en la categoría $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$,deseamos ampliar la categoría

$$Var_{Aff} \subset Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets).$$

La nueva categoría debe contener objetos “geométricos”.

Para cada k-álgebra A finitamente generada, tenemos un funtor covariante

$$h_{Spec\ A} : \left(\frac{Alg_k}{fin.gen.}\right) \to Sets$$

$$R \to Hom_{Alg_k}(A, R).$$

Para cada k-álgebra A finitamente generada, tenemos un funtor covariante

$$h_{Spec\,A} : (\frac{Alg_k}{fin.gen.}) \rightarrow Sets$$

$$R \rightarrow Hom_{Alg_k}(A, R).$$

Lo cual determina un funtor contravariante

$$h_{Spec} : \frac{Alg_k}{fin.gen.} \rightarrow Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets),$$

$$A \rightarrow h_{Spec\,A}.$$

Para cada k-álgebra A finitamente generada, tenemos un funtor covariante

$$h_{Spec\,A} : (\frac{Alg_k}{fin.gen.}) \to Sets$$

$$R \to Hom_{Alg_k}(A, R).$$

Lo cual determina un funtor contravariante

$$h_{Spec} : \frac{Alg_k}{fin.gen.} \to Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets),$$

$$A \to h_{Spec\,A}.$$

Lema de Yoneda implica que es completamente fiel.

Lema (Versión fuerte)

Dado cualquier funtor contravariante $F : \mathcal{C}^{op} \to Sets$ *y* $X \in Obj(\mathcal{C})$ *entonces existe una biyección entre los siguientes conjuntos*

$$F(X) = Hom(h_X, F)$$

Lema (Versión fuerte)

Dado cualquier funtor contravariante $F : \mathcal{C}^{op} \to Sets$ *y* $X \in Obj(\mathcal{C})$ *entonces existe una biyección entre los siguientes conjuntos*

$$F(X) = Hom(h_X, F)$$

Lema (Versión débil)

Sean X, Y *variedades afines, entonces existe una biyección entre los siguientes conjuntos*

$$Hom_{Var_{aff}}(X, Y) \cong Hom(h_X, h_Y)$$

Esta biyección envía el morfismo (de variedades) $X \to Y$ *a* $h_X \to h_Y$.

Así continuando con la idea anterior, no hacemos diferencia entre $Spec\ A$ y el funtor $h_{Spec\ A}$.

Así continuando con la idea anterior, no hacemos diferencia entre $Spec\ A$ y el funtor $h_{Spec\ A}$.

Definición

La categoría de k-esquemas afines de tipo finito, es la subcategoría completa de $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$ *que consiste de todos los funtores isomorfos a los funtores del tipo* $h_{Spec\ A}$.

Así continuando con la idea anterior, no hacemos diferencia entre $Spec\ A$ y el funtor $h_{Spec\ A}$.

Definición

La categoría de k-esquemas afines de tipo finito, es la subcategoría completa de $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$ *que consiste de todos los funtores isomorfos a los funtores del tipo* $h_{Spec\ A}$.

Observación

Para cualquier esquema S, *es posible construir el correspondiente funtor* h_S.

¿Cuál es la subcategoría de $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$ más grande que consiste de objetos geométricos?

Espacios Algebraicos.

Para definir de manera correcta los espacios algebraicos, consideramos de ahora en adelante a la categoría esquemas afines (Aff) en lugar de la categoría ($\frac{Alg_k}{fin.gen.}$).

Para definir de manera correcta los espacios algebraicos, consideramos de ahora en adelante a la categoría esquemas afines (Aff) en lugar de la categoría $(\frac{Alg_k}{fin.gen.})$.
Con ello reemplazaremos la categoría $Fun(\frac{Alg_k}{fin.gen.}, Sets)$ por la categoría $Fun^{op}(Aff, Sets)$ también conocida como la categoría de pregavillas de conjuntos sobre (Aff).

Además nuestros funtores ahora son de la forma

$$h : (Aff) \to Fun^{op}(Aff, Sets),$$

$$X \mapsto h_X.$$

Donde $h_X(Y) = Hom_{Sch}(Y, X)$.

Para que un funtor sea una gavilla es necesario definir una topología en la categoría de los esquemas (Afines).

Definición

Una topología de Grothendieck, para Aff *es una pareja* (Aff, τ)*, donde* τ *es un conjunto* $Cov\,\tau$ *de familias*

$$\{\phi_i : U_i \to U\}_{i \in I}$$

de morfismos en Aff *llamados cubrientes y los cuales cumplen con las siguientes condiciones.*

Para que un funtor sea una gavilla es necesario definir una topología en la categoría de los esquemas (Afines).

Definición

Una topología de Grothendieck, para Aff *es una pareja* (Aff, τ)*, donde* τ *es un conjunto* $Cov\,\tau$ *de familias*

$$\{\phi_i : U_i \to U\}_{i \in I}$$

de morfismos en Aff *llamados cubrientes y los cuales cumplen con las siguientes condiciones.*

1. *Si* ϕ *es un isomorfismo, entonces* $\{\phi\} \in Cov\,\tau$ *.*

Para que un funtor sea una gavilla es necesario definir una topología en la categoría de los esquemas (Afines).

Definición

Una topología de Grothendieck, para Aff *es una pareja* (Aff, τ), *donde* τ *es un conjunto* $Cov\,\tau$ *de familias*

$$\{\phi_i : U_i \to U\}_{i \in I}$$

de morfismos en Aff *llamados cubrientes y los cuales cumplen con las siguientes condiciones.*

1. *Si* ϕ *es un isomorfismo, entonces* $\{\phi\} \in Cov\,\tau$.
2. *Si* $\{\phi_i : U_i \to U\} \in Cov\,\tau$ *y* $\{\phi_{ij,i} : U_{ij} \to U_i\} \in Cov\,\tau$ *para cada* $i \in I$.

Para que un funtor sea una gavilla es necesario definir una topología en la categoría de los esquemas (Afines).

Definición

Una topología de Grothendieck, para Aff *es una pareja* (Aff, τ)*, donde* τ *es un conjunto* $Cov\, \tau$ *de familias*

$$\{\phi_i : U_i \to U\}_{i \in I}$$

de morfismos en Aff *llamados cubrientes y los cuales cumplen con las siguientes condiciones.*

1. *Si* ϕ *es un isomorfismo, entonces* $\{\phi\} \in Cov\, \tau$ *.*
2. *Si* $\{\phi_i : U_i \to U\} \in Cov\, \tau$ *y* $\{\phi_{ij,i} : U_{ij} \to U_i\} \in Cov\, \tau$ *para cada* $i \in I$*.Entonces* $\{\phi_i \circ \phi_{ij,i} : U_{ij} \to U\} \in Cov\, \tau$ *.*

Para que un funtor sea una gavilla es necesario definir una topología en la categoría de los esquemas (Afines).

Definición

Una topología de Grothendieck, para Aff *es una pareja* (Aff, τ)*, donde* τ *es un conjunto* $Cov\,\tau$ *de familias*

$$\{\phi_i : U_i \to U\}_{i \in I}$$

de morfismos en Aff *llamados cubrientes y los cuales cumplen con las siguientes condiciones.*

1. *Si* ϕ *es un isomorfismo, entonces* $\{\phi\} \in Cov\,\tau$ *.*
2. *Si* $\{\phi_i : U_i \to U\} \in Cov\,\tau$ *y* $\{\phi_{ij,i} : U_{ij} \to U_i\} \in Cov\,\tau$ *para cada* $i \in I$*.Entonces* $\{\phi_i \circ \phi_{ij,i} : U_{ij} \to U\} \in Cov\,\tau$ *.*
3. *Si* $\{U_i \to U\} \in Cov\,\tau$ *y* $V \to U \in Morf(Aff)$*, entonces* $U_i \times_U V$ *existe y* $\{U_i \times_U V \to V\} \in Cov\,\tau$ *.*

Si $X \in \mathit{Aff}$ y $\{X_i \to X\}$ un cubriente de X tal que I es finito y el morfismo inducido

$$\coprod_{i \in I} X_i \to X$$

es plano y sobreyectivo (fielmente plano). Entonces la topología es la topología *fppf*.

Otra topología que podemos considerar en X, es la topología suave (Zariski). Básicamente la definición es la misma solo tomando suave (encaje de Zariski) en lugar de plano.

Otra topología que podemos considerar en X, es la topología suave (Zariski). Básicamente la definición es la misma solo tomando suave (encaje de Zariski) en lugar de plano.
De manera similar podemos definir la topología etale.

Dada una topología en la categoría Aff. Podemos considerar el concepto de gavilla

Definición

Una gavilla es $\mathcal{F} \in Fun^{op}(Aff, Sets)$, *es decir*

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que para cualquier cubriente $U_i \to U$, *la siguiente sucesión es exacta*

$$\mathcal{F}(U) \to \sqcup \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \sqcup [\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

Dada una topología en la categoría *Aff*. Podemos considerar el concepto de gavilla

Definición

Una gavilla es $\mathcal{F} \in Fun^{op}(Aff, Sets)$, *es decir*

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que para cualquier cubriente $U_i \to U$, *la siguiente sucesión es exacta*

$$\mathcal{F}(U) \to \sqcup \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \sqcup [\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_i) \sqcup \mathcal{F}(U_j) \rightrightarrows \sqcup [\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

Dada una topología en la categoría *Aff*. Podemos considerar el concepto de gavilla

Definición

Una gavilla es $\mathcal{F} \in Fun^{op}(Aff, Sets)$*, es decir*

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que para cualquier cubriente $U_i \to U$*, la siguiente sucesión es exacta*

$$\mathcal{F}(U) \to \sqcup \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \sqcup[\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_i) \sqcup \mathcal{F}(U_j) \rightrightarrows \sqcup[\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

Toda pregavilla h_X es una gavilla.

Dada una topología en la categoría Aff. Podemos considerar el concepto de gavilla

Definición

Una gavilla es $\mathcal{F} \in Fun^{op}(Aff, Sets)$, es decir

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que para cualquier cubriente $U_i \to U$, la siguiente sucesión es exacta

$$\mathcal{F}(U) \to \sqcup \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \sqcup[\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_i) \sqcup \mathcal{F}(U_j) \rightrightarrows \sqcup[\mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)]$$

Toda pregavilla h_X es una gavilla.
Si $\mathcal{F}$ es una gavilla isomorfa a h_X diremos que X representa a $\mathcal{F}$.

Un morfismo de gavillas $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es representable en *Aff* si para cualquier esquema Afín X y cualquier morfismo

$$h_X \to \mathcal{G}$$

el producto fibrado es representable, es decir

$$h_X \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F} \cong h_Z$$

para algún esquema afín Z.

Definición

Un espacio algebraico (de tipo finito) es una gavilla

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que:

1. *La diagonal* $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *es casi afín.*
2. *existe un esquema afín* U *y un epimorfismo suave*

   $$h_U \to \mathcal{F}$$

   llamado atlas, el cual es representable.

Stacks Algebraicos.

Osbaldo Mata Gutiérrez.

EGA 2015.

Definición

Un espacio algebraico (de tipo finito) es una gavilla

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que:

1. *La diagonal* $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *es representable y casi-afín.*
2. *Existe un esquema afín* U *y un epimorfismo suave.*

$$h_U \to \mathcal{F}$$

   llamado atlas.

Definición

Un espacio algebraico (de tipo finito) es una gavilla

$$\mathcal{F} : Aff^{op} \to Sets$$

tal que:

1. *La diagonal* $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *es representable y casi-afín.*
2. *Existe un esquema afín* U *y un epimorfismo suave.*

$$h_U \to \mathcal{F}$$

   llamado atlas.

Proposición

Un espacio algebraico $\mathcal{F}$ es localmente un esquema afín (en la topología etale) Esto es, se pueden encontrar un número finito de esquemas afines tales que

$$\coprod U_i \to \mathcal{F}$$

es un epimorfismo etale.

Ejercicio: Todo funtor h_X con $X \in Obj(Aff)$ es un espacio algebraico

¿Cómo construir un espacio algebraico?

Para ello es necesario considerar relaciones de equivalencia. Esto es: Sean U, R esquemas afines. Una relación de equivalecia (etale) se compone de un par de morfismos (etale)

$$R \rightrightarrows U$$

tal que para cualquier esquema afín T,

$$h_R(T) \rightrightarrows h_U(T)$$

es una relación de equivalencia.

En el caso de tener relaciones de equivalencia como las anteriores se tiene el siguiente digrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ U \arrow[r] & U/R \end{tikzcd}$$

donde U/R es la gavilla cociente. De esta manera U/R es un espacio algebraico, y U es el atlas correspondiente

¿Cómo podría obtenerse un espacio algebraico a partir de una acción de grupo?

Para definir propiedades sobre los espacios algebraicos, usamos el atlas

Para definir propiedades sobre los espacios algebraicos, usamos el atlas

1. Singular
2. Dimensión.

****

Stacks Algebraicos

De la misma manera que los esquemas generalizan el concepto de variedad, los stacks generalizan el concepto de espacio algebraico.

De la misma manera que los esquemas generalizan el concepto de variedad, los stacks generalizan el concepto de espacio algebraico. "Los Stacks son una generalización de espacios algebraicos".

Siguiendo las ideas de Grothendieck (1959) y Giraud en (1964) Deligne y Mumford introducen el término Stack en 1969.

Siguiendo las ideas de Grothendieck (1959) y Giraud en (1964) Deligne y Mumford introducen el término Stack en 1969. Posteriormente, Artin considera en 1974 una generalización de los stacks

Dado un problema moduli ¿Siempre existe el espacio moduli?
¿Qué impide la existencia de un espacio moduli?

Dado un problema moduli ¿Siempre existe el espacio moduli? ¿Qué impide la existencia de un espacio moduli?

Respuesta: Automorfismos.

Dado un problema moduli ¿Siempre existe el espacio moduli?
¿Qué impide la existencia de un espacio moduli?

Respuesta: Automorfismos.

Siempre puedes construir dos familias no equivalentes parametrizadas por T, tal que corresponden al mismo morfismo.

En lugar de encontrar una familia que rige a las demás, consideramos todas las familias sobre todos los espacios de parámetros como el moduli (stack).

En lugar de encontrar una familia que rige a las demás, consideramos todas las familias sobre todos los espacios de parámetros como el moduli (stack).
El problema con ello es que necesitamos dotarlo de una estrúctura algebraica, como por ejemplo: esquema ó espacio algebraico.

La idea ahora es considerar los objetos junto con la información dada por los automorfismos

La idea ahora es considerar los objetos junto con la información dada por los automorfismos
Por esta razón, funtores del tipo

$$\mathfrak{X} : Aff^{op} \to Sets$$

¡No funcionan!

La idea ahora es considerar los objetos junto con la información dada por los automorfismos
Por esta razón, funtores del tipo

$$\mathfrak{X} : Aff^{op} \rightarrow Sets$$

¡No funcionan!
Por lo tanto es necesario considerar funtores del siguiente tipo

$$\mathfrak{X} : Aff^{op} \rightarrow Gpds$$

La idea ahora es considerar los objetos junto con la información dada por los automorfismos
Por esta razón, funtores del tipo

$$\mathfrak{X} : Aff^{op} \to Sets$$

¡No funcionan!
Por lo tanto es necesario considerar funtores del siguiente tipo

$$\mathfrak{X} : Aff^{op} \to Gpds$$

Un grupoide es una categoría donde todos los morfismo son isomorfimos

Ejemplos de Grupoides:

1. Un conjunto $\mathcal{A}$, es un grupoide.

Ejemplos de Grupoides:

1. Un conjunto $\mathcal{A}$, es un grupoide.
2. Si G es un grupo, entonces determinamos el grupoide BG.

Ejemplos de Grupoides:

1. Un conjunto $\mathcal{A}$, es un grupoide.
2. Si G es un grupo, entonces determinamos el grupoide BG.
3. Si X es un G-conjunto, entonces definimos el grupoide X_G.

Ejemplos de Grupoides:

1. Un conjunto $\mathcal{A}$, es un grupoide.
2. Si G es un grupo, entonces determinamos el grupoide BG.
3. Si X es un G-conjunto, entonces definimos el grupoide X_G.
4. Toda relación de equivalencia R definida en un conjunto $\mathcal{A}$ define un grupoide.

Producto Fibrado de Grupoides:

Producto Fibrado de Grupoides:
Consideremos un diagrama de grupoides

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Producto Fibrado de Grupoides:
Consideremos un diagrama de grupoides

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

El producto se define como las tripletas (x, ϕ, z) para las cuales $\phi : f(x) \to g(z)$ es un morfismo en Y.

Producto Fibrado de Grupoides:
Consideremos un diagrama de grupoides

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

El producto se define como las tripletas (x, ϕ, z) para las cuales $\phi : f(x) \to g(z)$ es un morfismo en Y.

Un morfismo en el producto es un par $(\alpha, \beta) : (x, \phi, z) \to (x', \phi', z')$ tal que

$$\alpha : x \to x'$$

$$\beta : z \to z'$$

y el diagrama conmuta en Y

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f(\alpha)"'] & Z \arrow[d, "g(\beta)"] \\ X \arrow[r, "\phi'"'] & Y \end{tikzcd}$$

El diagrama viene acompañado de un 2-morfismo ν, lo que implica el que diagrama $2-$ *conmuta*.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

En este caso el dos morfismo es:

El diagrama viene acompañado de un 2-morfismo ν, lo que implica el que diagrama $2-$ *conmuta*.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

En este caso el dos morfismo es:

$$\nu(x, \phi, z) = \phi$$

la cual es una transformación natural.

Definición

*Un prestack es un funtor contravariante**

$$\mathfrak{X} : (aff)^{op} \to Gpds$$

Que respete la estructura de 2-categoría.

Definición

*Un prestack es un funtor contravariante**

$$\mathfrak{X} : (aff)^{op} \to Gpds$$

Que respete la estructura de 2-categoría.

1. *Objetos a objetos y morfismos a morfismos.*
2. *Las composiciones 2-conmutan*
3. *La identidad de un objeto va a la identidad.*
4. *Para las composiciones $X \to Y \to Z \to W$ en (Aff) se satisfacen las condiciones de 2-cociclos para los 2-morfismos.*

*La definición para prestack es: Un prestack es un pseudo funtor.

Definición

*Un prestack es un funtor contravariante**

$$\mathfrak{X} : (aff)^{op} \to Gpds$$

Que respete la estructura de 2-categoría.

1. *Objetos a objetos y morfismos a morfismos.*
2. *Las composiciones 2-conmutan*
3. *La identidad de un objeto va a la identidad.*
4. *Para las composiciones $X \to Y \to Z \to W$ en (Aff) se satisfacen las condiciones de 2-cociclos para los 2-morfismos.*

*La definición para prestack es: Un prestack es un pseudo funtor.Donde el prefijo "pseudo" condensa la información necesaria para los 2-morfismos.

La idea de considerar stacks es que ahora estamos tomando en cuenta los objetos junto con sus automorfismos.

$$(A, \psi)$$

Si el objeto tiene varios automorfismos, entonces aparecerá tantas veces como automorfismos tenga.

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ *que cumple las siguientes condiciones de pegado.*

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ que cumple las siguientes condiciones de pegado.

Para cualquier familia cubriente $\{U_i \to U\}$ para (Aff), entonces

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ que cumple las siguientes condiciones de pegado.

Para cualquier familia cubriente $\{U_i \to U\}$ para (Aff), entonces

PO (Pegado de Objetos)

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ que cumple las siguientes condiciones de pegado.

Para cualquier familia cubriente $\{U_i \to U\}$ para (Aff), entonces

PO (Pegado de Objetos)Dados objetos X_i en $\mathfrak{X}(U_i)$ y morfismos $\phi_{ij} : f_{ij,i}^* X_i \to f_{ij,j}^* X_j$ satisfaciendo la condición de cociclos. $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$. Entonces existe un objeto X en $\mathfrak{X}(U)$ y un isomorfismo $\phi_i : f_i^* X \to X_i$.

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ que cumple las siguientes condiciones de pegado.

Para cualquier familia cubriente $\{U_i \to U\}$ para (Aff), entonces

PO (Pegado de Objetos)Dados objetos X_i en $\mathfrak{X}(U_i)$ y morfismos $\phi_{ij} : f_{ij,i}^* X_i \to f_{ij,j}^* X_j$ satisfaciendo la condición de cociclos. $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$. Entonces existe un objeto X en $\mathfrak{X}(U)$ y un isomorfismo $\phi_i : f_i^* X \to X_i$.

PM (Pegado de Morfismos)

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ que cumple las siguientes condiciones de pegado.

Para cualquier familia cubriente $\{U_i \to U\}$ para (Aff), entonces

PO (Pegado de Objetos)Dados objetos X_i en $\mathfrak{X}(U_i)$ y morfismos $\phi_{ij} : f_{ij,i}^* X_i \to f_{ij,j}^* X_j$ satisfaciendo la condición de cociclos. $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$. Entonces existe un objeto X en $\mathfrak{X}(U)$ y un isomorfismo $\phi_i : f_i^* X \to X_i$.

PM (Pegado de Morfismos)Dado un par de objetos X y Y en $\mathfrak{X}(U)$ y morfismos $\phi_i : f_i^* X \to f_i^* Y$ tales que $f_{ij,i}^* \phi_i = f_{ij,j}^* \phi_j$ Entonces existe un morfismo $\phi : X \to Y$ tal que $f_i^* \phi = \phi_i$.

Definición

Un stack es, un prestack $\mathfrak{X} : (Aff)^{op} \to Gpds$ que cumple las siguientes condiciones de pegado.

Para cualquier familia cubriente $\{U_i \to U\}$ para (Aff), entonces

- **PO** (Pegado de Objetos)Dados objetos X_i en $\mathfrak{X}(U_i)$ y morfismos $\phi_{ij} : f^*_{ij,i}X_i \to f^*_{ij,j}X_j$ satisfaciendo la condición de cociclos. $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$. Entonces existe un objeto X en $\mathfrak{X}(U)$ y un isomorfismo $\phi_i : f_i^*X \to X_i$.
- **PM** (Pegado de Morfismos)Dado un par de objetos X y Y en $\mathfrak{X}(U)$ y morfismos $\phi_i : f_i^*X \to f_i^*Y$ tales que $f^*_{ij,i}\phi_i = f^*_{ij,j}\phi_j$ Entonces existe un morfismo $\phi : X \to Y$ tal que $f_i^*\phi = \phi_i$.
- **MPG** (Monopregavilla) Dado un par de objetos X y Y en $\mathfrak{X}(U)$ y un par de morfismos $\phi, \psi : X \to Y$ Si $f_i^*\phi = f_i^*\psi$ para todo i, entonces $\phi = \psi$

Ejemplo

1. *Toda gavilla es un stack.*
2. $\mathfrak{B}_n : (Aff) \to Gpds.$

Definición

Un stack es algebraico si satisface las siguiente condiciones.

Definición

Un stack es algebraico si satisface las siguiente condiciones.

1. *La diagonal* $\Delta : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ *es representable, de tipo finito.*
2. *Existe un esquema afín,* U *y un epimorfismo suave* $h_U \to \mathfrak{X}$*.(Atlas)*

1. Todo espacio algebraico es un stack algebraico.
2. $\mathfrak{B}_n$ es un stack algebraico.
3. $[X/G] : (Aff)^{op} \to Gpds$.

Definición (Stack)

Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría dotada de una topología de Grothendieck τ (sitio). Un stack $\mathfrak{X}$ es una CFG sobre $\mathcal{C}$ que cumple las siguientes condiciones:

Definición (Stack)

Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría dotada de una topología de Grothendieck τ (sitio). Un stack $\mathfrak{X}$ es una CFG sobre $\mathcal{C}$ que cumple las siguientes condiciones:
Para cualquier familia cubriente $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I}$ en el sitio $\mathcal{C}_\tau$, entonces

Definición (Stack)

Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría dotada de una topología de Grothendieck τ (sitio). Un stack $\mathfrak{X}$ es una CFG sobre $\mathcal{C}$ que cumple las siguientes condiciones:
Para cualquier familia cubriente $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I}$ en el sitio $\mathcal{C}_\tau$, entonces

1. *(Pegado de Objetos)*

Definición (Stack)

Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría dotada de una topología de Grothendieck τ (sitio). Un stack $\mathfrak{X}$ es una CFG sobre $\mathcal{C}$ que cumple las siguientes condiciones:
Para cualquier familia cubriente $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ en el sitio $\mathcal{C}_\tau$, entonces

1. *(Pegado de Objetos)*
2. *(Pegado de morfismos)*

Definición (Stack)

Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría dotada de una topología de Grothendieck τ (sitio). Un stack $\mathfrak{X}$ es una CFG sobre $\mathcal{C}$ que cumple las siguientes condiciones:
Para cualquier familia cubriente $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I}$ en el sitio $\mathcal{C}_\tau$, entonces

1. *(Pegado de Objetos)*
2. *(Pegado de morfismos)*
3. *(Monopregavilla)*

Más importante aún, un Stack siempre es representable.

Más importante aún, un Stack siempre es representable.Esto es, siempre contará con una "Familia Universal"
¿Quién representa a los Stacks?

1. Esquemas
2. Espacios Algebraicos
3. Categorías Fibradas por grupoides.

Una CFG condensa la información de un espacio moduli respecto al pullback de familias.

Una CFG condensa la información de un espacio moduli respecto al pullback de familias.
Sin embargo ello no implica que podamos “pegar” familias.

Una CFG condensa la información de un espacio moduli respecto al pullback de familias.
Sin embargo ello no implica que podamos "pegar" familias.
Por lo que las Categorías fibradas por grupoides están relacionadas con prestacks.

NOTACION:
Consideremos, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ un par de categorías.

NOTACION:
Consideremos, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ un par de categorías.
$F : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un funtor entre ellas.

NOTACION:
Consideremos, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ un par de categorías.
$F : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un funtor entre ellas.
Si $F(X) = C$ decimos que X vive sobre C (X/C).

NOTACION:
Consideremos, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ un par de categorías.
$F : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un funtor entre ellas.
Si $F(X) = C$ decimos que X vive sobre C (X/C).
Definimos el conjunto $\mathcal{X}(C) := \{X \in Obj(\mathcal{X}) | X/C\}$.

NOTACION:
Consideremos, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ un par de categorías.
$F : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un funtor entre ellas.
Si $F(X) = C$ decimos que X vive sobre C (X/C).
Definimos el conjunto $\mathcal{X}(C) := \{X \in Obj(\mathcal{X}) | X/C\}$.
De igual manera para los morfismo:

NOTACION:
Consideremos, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ un par de categorías.
$F : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un funtor entre ellas.
Si $F(X) = C$ decimos que X vive sobre C (X/C).
Definimos el conjunto $\mathcal{X}(C) := \{X \in Obj(\mathcal{X}) | X/C\}$.
De igual manera para los morfismo:
$g \in Mor(\mathcal{X})$ y $h \in Mor(\mathcal{C})$ g cubre a h si $F(g) = h$.

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Una CFG $\mathcal{X}$ es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumplen las siguientes propiedades:

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Una CFG $\mathcal{X}$ *es una terna* $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada morfismo* $h : C' \to C$ *y cada* X/C *existe un objeto* X'/C' *y un morfismo* $g : X' \to X$ *cubriendo a* h*.*

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Una CFG $\mathcal{X}$ *es una terna* $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada morfismo* $h : C' \to C$ *y cada* X/C *existe un objeto* X'/C' *y un morfismo* $g : X' \to X$ *cubriendo a* h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ C \end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Una CFG $\mathcal{X}$ es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. *Para cada morfismo $h : C' \to C$ y cada X/C existe un objeto X'/C' y un morfismo $g : X' \to X$ cubriendo a h.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada morfismo* $h : C' \to C$ *y cada* X/C *existe un objeto* X'/C' *y un morfismo* $g : X' \to X$ *cubriendo a* h.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d] & X \arrow[d] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada morfismo* $h : C' \to C$ *y cada* X/C *existe un objeto* X'/C' *y un morfismo* $g : X' \to X$ *cubriendo a* h*.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. *(Pullback) Para cada morfismo $h : C' \to C$ y cada X/C existe un objeto X'/C' y un morfismo $g : X' \to X$ cubriendo a h.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *(Pullback)*

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *(Pullback)*
2. *El objeto* X'/C' *y el morfismo* $X' \to X$ *es único salvo isomorfismo.*

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *(Pullback)*
2. *El objeto* X'/C' *y el morfismo* $X' \to X$ *es único salvo isomorfismo. Es decir: si otro morfismo* $X'' \to X$ *cubre a* $C' \to C$*, entonces existe un único morfismo* $X'' \to X'$ *que cubre a la identidad en* C'.

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. *(Pullback)*
2. *El objeto X'/C' y el morfismo $X' \to X$ es único salvo isomorfismo. Es decir: si otro morfismo $X'' \to X$ cubre a $C' \to C$, entonces existe un único morfismo $X'' \to X'$ que cubre a la identidad en C'.*

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] \\
& X' \arrow[ur, "g"] \arrow[dd] & \\
C' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "id_{C'}"'] & & C \\
& C' \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. *(Pullback)*
2. *El objeto X'/C' y el morfismo $X' \to X$ es único salvo isomorfismo. Es decir: si otro morfismo $X'' \to X$ cubre a $C' \to C$, entonces existe un único morfismo $X'' \to X'$ que cubre a la identidad en C'.*

$$
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] \\
& X' \arrow[ur, "g"'] \arrow[dd] & \\
C' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "id_{C'}"'] & & C \\
& C' \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. *(Pullback)*
2. *(Unicidad salvo isomorfismo) El objeto X'/C' y el morfismo $X' \to X$ es único salvo isomorfismo. Es decir: si otro morfismo $X'' \to X$ cubre a $C' \to C$, entonces existe un único morfismo $X'' \to X'$ que cubre a la identidad en C'.*

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] \\
& X' \arrow[ur, "g"] \arrow[dd] & \\
C' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "id_{C'}"'] & & C \\
& C' \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. *El pullback existe.*
2. *El pulback es único salvo isomorfismo*

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. *El pullback existe.*
2. *El pulback es único salvo isomorfismo*

Observación

Para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$, $\mathcal{X}(C)$ *es un grupoide.*

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumple las siguientes propiedades:

1. *El pullback existe.*
2. *El pulback es único salvo isomorfismo*

Observación

Para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$, $\mathcal{X}(C)$ es un grupoide.

Dos categorías fibradas por grupoides son isomorfas si existen:

1. Morfismos $\mathcal{X} \xrightarrow{G} \mathcal{Y} \xrightarrow{H} \mathcal{X}$.

Definición (Categoría Fibrada por Grupoides (CFG))

Es una terna $(\mathcal{X}, F, \mathcal{C})$ que cumple las siguientes propiedades:

1. *El pullback existe.*
2. *El pulback es único salvo isomorfismo*

Observación

Para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$, $\mathcal{X}(C)$ es un grupoide.

Dos categorías fibradas por grupoides son isomorfas si existen:

1. Morfismos $\mathcal{X} \xrightarrow{G} \mathcal{Y} \xrightarrow{H} \mathcal{X}$.
2. 2-morfismos tales que $\theta : G \circ F \Rightarrow id_{\mathcal{X}}$
   . $\eta : F \circ G \Rightarrow id_{\mathcal{X}}$

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{C}_\tau$ un sitio, y C un objeto de $\mathcal{C}$. Definimos la siguiente categoría:

1. $Obj(\mathfrak{X}) := \{f : A \to C | f \in Mor(\mathcal{C})\}$.
2. $Mor(\mathfrak{X}) := \{A' \xrightarrow{\cong} h^* A\}$. *Para algún* $h : C' \to C$

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{C}_\tau$ un sitio, y C un objeto de $\mathcal{C}$. Definimos la siguiente categoría:

1. $Obj(\mathfrak{X}) := \{f : A \to C | f \in Mor(\mathcal{C})\}$.
2. $Mor(\mathfrak{X}) := \{A' \xrightarrow{\cong} h^*A\}$. *Para algún* $h : C' \to C$

$$\begin{tikzcd} A' \cong h^*A \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{C}_\tau$ *un sitio, y* C *un objeto de* $\mathcal{C}$. *Definimos la siguiente categoría:*

1. $Obj(\mathfrak{X}) := \{f : A \to C | f \in Mor(\mathcal{C})\}$.
2. $Mor(\mathfrak{X}) := \{A' \xrightarrow{\cong} h^*A\}$. *Para algún* $h : C' \to C$

$$\begin{tikzcd} A' \cong h^*A \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

3. *(Ejercicio)* $\mathfrak{X} \to \mathcal{C}$, *es una CFG.*

Definición (Morfismos de Stacks)

Dado un sitio $\mathcal{C}_\tau$, un morfismo de stacks

$$F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y},$$

es

Definición (Morfismos de Stacks)

Dado un sitio $\mathcal{C}_\tau$, un morfismo de stacks

$$F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y},$$

es un funtor entre CFG que conmuta con las proyecciones

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{Y} \arrow[dl] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

Definición (Morfismos de Stacks)

Dado un sitio $\mathcal{C}_\tau$, un morfismo de stacks

$$F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y},$$

es un funtor entre CFG que conmuta con las proyecciones

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{Y} \arrow[dl] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

El producto fibrado de stacks es un stack.

¿Cómo damos estructura geometríca a un stack?

¿Cómo damos estructura geometríca a un stack?

Definición

1. *Un stack $\mathfrak{X}$ es representable por un esquema (espacio algebraico) si existe un esquema X (espacio algebraico $\mathcal{X}$) tal que el stack asociado es isomorfo a $\mathfrak{X}$*

¿Cómo damos estructura geometríca a un stack?

Definición

1. *Un stack* $\mathfrak{X}$ *es representable por un esquema (espacio algebraico) si existe un esquema* X *(espacio algebraico* $\mathcal{X}$*) tal que el stack asociado es isomorfo a* $\mathfrak{X}$
2. *Un morfismo de stacks* $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *es representable por un esquema (espacio algebraico) si para cada* $Y \in Obj(Sch_S)$ *y cada morfismo de stacks* $\underline{Y} \to \mathfrak{Y}$*, el producto fibrado es representable por un esquema (espacio algebraico).*

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\
\underline{Y} \arrow[r] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

Proposición

1. *La propiedad de ser representable es estable bajo cambio de base.*
2. *La composición y producto de morfismos representables es representable.*

De esta manera, es posible extender las propiedades geométricas de morfismos de esquemas a propiedades en morfismos representables de stacks.

Ejemplo (Cubriente étale)

Como ser sobreyectivo y étale son propiedades (en esquemas) estables bajo cambio de base y locales en el objetivo.

Ejemplo (Cubriente étale)

Como ser sobreyectivo y étale son propiedades (en esquemas) estables bajo cambio de base y locales en el objetivo.
Entonces un morfismo de stacks $\underline{X} \to \mathfrak{X}$ *es sobreyectivo y étale si*

Ejemplo (Cubriente étale)

Como ser sobreyectivo y étale son propiedades (en esquemas) estables bajo cambio de base y locales en el objetivo.
Entonces un morfismo de stacks $\underline{X} \to \mathfrak{X}$ *es sobreyectivo y étale si para cualquier esquema* U *y morfismo* $\underline{U} \to \mathfrak{X}$ *el morfismo de esquemas inducido es sobreyectivo y etale.*

Definición

Un stack $\mathfrak{X}$ sobre el sitio $(Sch_S)_{et}$ es de Deligne-Mumford si:

1. *El morfismo diagonal $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ es representable, casicompacta y separada.*
2. *Existe un esquema U y un morfismo $U \to \mathfrak{X}$ etale y sobreyectivo.*

Definición

Un stack $\mathfrak{X}$ sobre el sitio $(Sch_S)_{et}$ es de Artin si:

1. *El morfismo diagonal $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ es representable, casicompacta y separada.*
2. *Existe un esquema U y un morfismo $U \to \mathfrak{X}$ suave y sobreyectivo.*

Gracias

1 D. Knutson. Algebraic Space
2 G. Laumon and L. Moret-Bailly, Champs Algebriques.
3 Deligne and Mumford. Irreducibility of the space of curves of given genus.
4 Tomás Gomez. Algebraic Stacks.
5 Jochen Heinloth. Moduli of Stacks of curves.
6 Kai Behrend Notas *.
7 Fantechi et. al. Fundamental Algebraic Geometry Grothendieck´s FGA Explained.
8 Frank Neumann. Algebraic Stacks.
9 Stack Project http://stacks.math.columbia.edu/