La fórmula de Riemann-Hurwitz para superficies de Riemann

Jesús Romero Valencia.

Resumen

El propósito de estas notas es presentar y dar una demostración del Teorema de Riemann–Hurwitz, desde un punto de vista topológico, usando herramientas sencillas como son el grado de una aplicación holomorfa y la multiplicidad de la misma en un punto.

1. Superficies de Riemann

En esta sección, X representa un espacio topológico Hausdorff, conexo y segundo numerable, a menos que se indique otra cosa.

Definición: Sean $U \subset X$ abierto y V un disco de $\mathbb{C}$, *una carta (compleja)* es un homeomorfismo $\phi : U \to V$. Si $p \in U$, diremos que *la carta está centrada en p*, si $\phi(p) = 0$.

Ejemplo: Las siguientes son cartas en el espacio considerado:

I. en $\mathbb{R}^2$, las funciones $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, dada por:

$$(x, y) \longmapsto x + iy$$

y $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dada por:

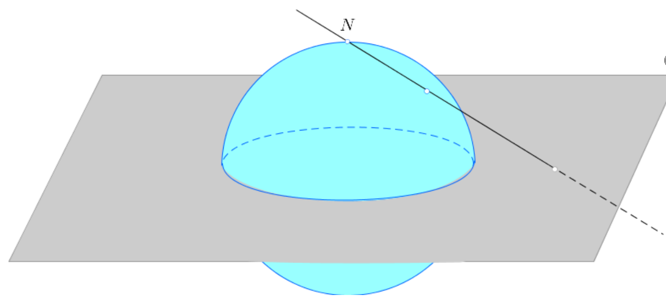
$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

II. en $\mathbb{C}$ la función identidad $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$x + iy \longmapsto x + iy.$$

III. en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$, si $N = (0,0,1)$ y $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\}$, la función $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ dada por:

$$(a,b,c) \longmapsto \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}.$$

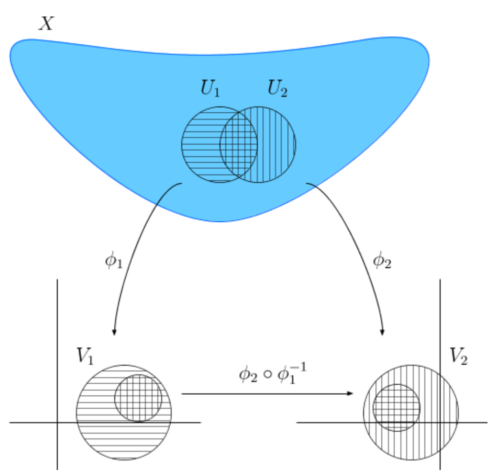


Análogamente, si $S = (0,0,-1)$ y $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$, la función $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ dada por:

$$(a,b,c) \longmapsto \frac{a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}.$$

$\diamondsuit$

Sean $U_1, U_2 \subset X$ dos abiertos y consideremos dos cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$, tenemos dos posibilidades: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, en el segundo caso la situación es como en la siguiente figura:



Definición: Diremos que *las cartas ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles*, si sus dominios no se intersectan o cuando se intersectan la composición:

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(V_1 \cap V_2)$$

es una función holomorfa.

Notemos que la condición que pedimos tiene sentido, puesto que la función $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es compleja de variable compleja.

Ejemplo: Las cartas de ϕ y ψ del ejemplo I anterior no son compatibles.
Solución: Sabemos que ϕ y ψ, definidas en todo $\mathbb{R}^2$, están dadas por:

$$(x, y) \longmapsto x + iy$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}},$$

respectivamente. Notemos que:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi^{-1})(x+iy) &= \psi(\phi^{-1}(x+iy)) = \psi(x,y) \\ &= \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= u + iv,\end{aligned}$$

y esta función no es holomorfa en $\mathbb{C}$, pues:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1}{2\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 + 1}, \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1}{2\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 + 1},$$

es decir, no satisface las condiciones de Cauchy-Riemann. $\diamondsuit$

Ejercicio: Las cartas del ejemplo III son compatibles.

Definición: Bajo las condiciones anteriores.

I. *Un atlas (complejo) de X* es un conjunto de cartas:

$$\mathcal{A} = \{\phi_j : U_j \to V_j\}$$

en el cual cualesquiera dos de ellas son compatibles y $\bigcup_j U_j = X$.

II. Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos atlas de X tales que cada carta de $\mathcal{A}_1$ es compatible con cada carta de $\mathcal{A}_2$, diremos que *$\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son equivalentes.*

Se puede demostrar fácilmente que la relación de que dos atlas sean equivalentes resulta ser, precisamente, de equivalencia. Esto nos permite clasificar a todos los posibles atlas de X en clases de equivalencia. Notemos además que si $\mathcal{A}$ es un atlas de X y $[\mathcal{A}]$ es su clase de equivalencia, entonces:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]} \mathcal{A}'$$

es un atlas máximo.

Definición: A una clase de equivalencia de atlas sobre X la llamaremos *estructura compleja de X*.

De manera equivalente, se puede definir estructura compleja de X, como un atlas máximo de X.

Definición: Bajo las condiciones de arriba, *una superficie de Riemann* es una pareja que consta de X y una estructura compleja sobre él.

Ejemplo:

I. $\mathbb{R}^2$ con la clase del atlas $\mathcal{A} = \{\phi\}$ del primer ejemplo.

II. $\mathbb{R}^2$ con la clase del atlas $\mathcal{A} = \{\psi\}$ del primer ejemplo.

III. $\mathbb{C}$ con la clase del atlas $\mathcal{A} = \{1_{\mathbb{C}}\}$.

IV. $\mathbb{S}^2$ con la clase del atlas $\mathcal{A} = \{\phi_1, \phi_2\}$, del tercer ejemplo. Esta superficie de Riemann se llama *la esfera de Riemann* y la denotamos por $\mathbb{C}_\infty$.

Notemos que de los ejemplos anteriores, únicamente $\mathbb{C}_\infty$ es una superficie de Riemann compacta, las demás no lo son.

Curvas planas afines

Sean $f(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ y $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, recordemos que *$f(z,w)$ es singular en (a,b)*, si:

$$0 = f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial z}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial w}(a,b).$$

$f(z,w)$ *se llama no singular*, si no es singular en cada punto de $\mathbb{C}^2$.

Definición: Sea $f(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$, definimos *la curva afín definida por* $f(z,w)$ como el conjunto:

$$X = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : f(a,b) = 0\}.$$

Diremos que X *es no singular*, si el polinomio que la define $f(z,w)$ es no singular.

Sean X una curva plana afín no singular y $p \in X$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$, entonces, por el teorema de la función implícita, existen una vecindad U_p, alrededor de p, y una función holomorfa $g_p : U \to \mathbb{C}$ tales que:

$$w = g_p(z), \quad \text{para todo } z \in U.$$

Claramente, la función $\pi_p : U \to \mathbb{C}$, dada por:

$$(z,w) \longmapsto z,$$

es un homeomorfismo entre U y $\pi_p(U)$, así π_p es una carta de X. Construyamos cartas de esta manera para cada $p \in X$ y consideremos el conjunto:

$$\mathcal{A} = \{\pi_p : p \in X\}.$$

Veamos que cualesquiera dos cartas son compatibles: supongamos que $q \in U_1 \cap U_2$, consideremos las cartas π_1 y π_2, sobre U_1 y U_2, respectivamente. Si $z = \pi_1(q)$, entonces:

$$(\pi_2 \circ \pi_1^{-1})(z) = \pi_2(\pi_1^{-1}(z)) = \pi_2(q) = z,$$

es decir, $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ es la función identidad en $\pi_1(U_1 \cap U_2)$, por lo cual es holomorfa, así, dichas cartas son compatibles y, por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un atlas de X.

Como $\mathbb{C}^2$ es Hausdorff y segundo numerable, así es X. Por último, daremos por hecho que X es conexo[1]. En resumen, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1 *Si X es una curva plana afín no singular, entonces X, con el atlas $\mathcal{A}$, es una superficie de Riemann.*

[1] Una demostración de esta afirmación puede encontrarse en [G-H], página 21.

Curvas planas proyectivas

Definición: Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos *el $n-$espacio proyectivo complejo* como el conjunto:

$$\mathbb{P}^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \dim \ell = 1\}.$$

En particular, si $n = 2$, $\mathbb{P}^2$ se llama *el plano proyectivo.*

Notemos que $\mathbb{P}^n$ se puede construir como un cociente de $\mathbb{C}^{n+1}$ de la siguiente manera: para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{n+1}$, distintos de cero, definimos la relación:

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \text{existe } k \in \mathbb{C},\ k \neq 0 \text{ tal que } \alpha = k\beta.$$

La anterior es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia son precisamente los subespacios de dimensión 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Para el caso particular del plano proyectivo, los elementos de $\mathbb{P}^2$ son rectas que pasan por el origen de $\mathbb{C}^3$, así, cualquier vector α, no cero, de ℓ satisface $\ell = \langle\alpha\rangle$. Si $\alpha = (a, b, c)$, denotaremos por $(a : b : c)$ a ℓ, es decir:

$$(a : b : c) = \{(ka, kb, kc) : k \in \mathbb{C},\ k \neq 0\}.$$

Ejercicio: $\mathbb{P}^2$ es un espacio Hausdorff.

Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{P}^2$:

$$U_0 = \{(x : y : z) : x \neq 0\}, \quad U_1 = \{(x : y : z) : y \neq 0\}$$
$$\text{y} \quad U_2 = \{(x : y : z) : z \neq 0\},$$

entonces cada uno de ellos es homeomorfo a $\mathbb{C}^2$, por ejemplo, para U_0 consideramos el homeomorfismo $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^2$ dado por:

$$(x : y : z) \longmapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

y análogamente para U_1 y U_2. Es claro que $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$, es decir, $\mathbb{P}^2$ lo podemos considerar como la unión de tres copias de $\mathbb{C}^2$.
Otra propiedad importante que poseé $\mathbb{P}^2$ es la compacidad. En efecto, si tomamos:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

el cual es un conjunto compacto, entonces la función $f : S \to \mathbb{P}^2$ dada por:

$$(a, b, c) \longmapsto (a : b : c)$$

es claramente continua y sobre, luego, $\mathbb{P}^2 = f(S)$ es compacto.

Definición: Sea $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, diremos que *el polinomio* $F(x, y, z)$ *es homogéneo de grado* d, si cada uno de sus términos es de grado d.

Ejemplo: El polinomio $x^3 - 3x^2y + 5yz^2 - z^3$ es homogéneo de grado 3, mientras que $x^2 + 3y$ no es homogéneo. $\diamondsuit$

Ejercicio: Demuestra la *fórmula de Euler*: si $F(x, y, z)$ es homogéneo de grado de d, entonces:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{d}\left(x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\right).$$

Consideremos $F(x, y, z)$ homogéneo de grado d. Si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, entonces:

$$F(ka, kb, kc) = k^d F(a, b, c), \quad \text{para todo } k,$$

así, si $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2$, la evaluación de $F(x, y, z)$ en este punto no tiene sentido, pues, en general:

$$F(a, b, c) \neq k^d F(a, b, c), \quad \text{para } k \neq 0.$$

Sin embargo, si $F(x, y, z)$ se anula en (a, b, c), entonces también se anulará en (ka, kb, kc), para todo k, por lo tanto tendrá sentido decir si $F(x, y, z)$ se anula en un punto de $\mathbb{P}^2$.

Definición: Sea $F(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d, se define *la curva plana proyectiva, definida por* F como el conjunto:

$$X = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}^2 : F(a, b, c) = 0\}.$$

Notemos que como X es cerrado en $\mathbb{P}^2$, entonces es compacto.

Sea X_0 el conjunto definido como sigue:

$$\begin{aligned} X_0 = X \cap U_0 &= \{(1 : b : c) : F(1, b, c) = 0\} \\ &\cong \{(b, c) \in \mathbb{C}^2 : f(b, c) = 0\}, \end{aligned}$$

donde, $f(y,z)$ es el polinomio definido por $F(1,y,z)$, entonces podemos ver que X_0 es la curva plana afín definida por el polinomio $f(y,z)$. Análogamente, tenemos las curvas planas afines X_1 y X_2. Por lo tanto, podemos considerar una curva plana proyectiva como la unión de tres curvas planas afines.

Definición: Diremos que X *es no singular*, si el polinomio que la define es no singular.

Proposición 1.1 *X es no singular si y solo si X_0, X_1 y X_2 son no singulares.*

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que alguna de las X_i es singular, digamos X_0, entonces el polinomio $f(y,z)$ que define a X_0 es singular, es decir, existe $(b,c) \in \mathbb{C}^2$ tal que:

$$f(b,c) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(b,c) = \frac{\partial f}{\partial z}(b,c),$$

entonces:

$$F(1,b,c) = f(b,c) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,b,c) = \frac{\partial f}{\partial y}(b,c) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,b,c) = \frac{\partial f}{\partial z}(b,c) = 0,$$

y por la fórmula de Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,b,c) = dF(1,b,c) - b\frac{\partial F}{\partial y}(1,b,c) - c\frac{\partial F}{\partial x}(1,b,c) = 0,$$

luego, F es singular y así X es singular.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que X es singular, entonces existe $(a:b:c) \in \mathbb{P}^2$ tal que:

$$F(a,b,c) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c),$$

supongamos que $a \neq 0$, entonces $(a : b : c) = (1 : u : v)$, donde $u = \frac{b}{a}$ y $v = \frac{c}{a}$. Si consideramos $f(y,z) = F(1,y,z)$, tenemos:

$$f(u,v) = F(1,u,v) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,u,v) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(u,v) = \frac{\partial F}{\partial z}(1,u,v) = 0,$$

lo cual implica que X_0 es singular. ■

Supongamos que X es no singular, entonces X_0, X_1 y X_2 son no singulares. Tomemos $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, atlas en X_0, X_1 y X_2, respectivamente.

Ejercicio: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un atlas de X.

X es conexa, pues es la unión de tres conjuntos conexos con intersección no vacía. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *Sea X una curva plana proyectiva no singular, entonces X, con el atlas $\mathcal{A}$, es una superficie de Riemann compacta.*

2. Aplicaciones entre superficies de Riemann

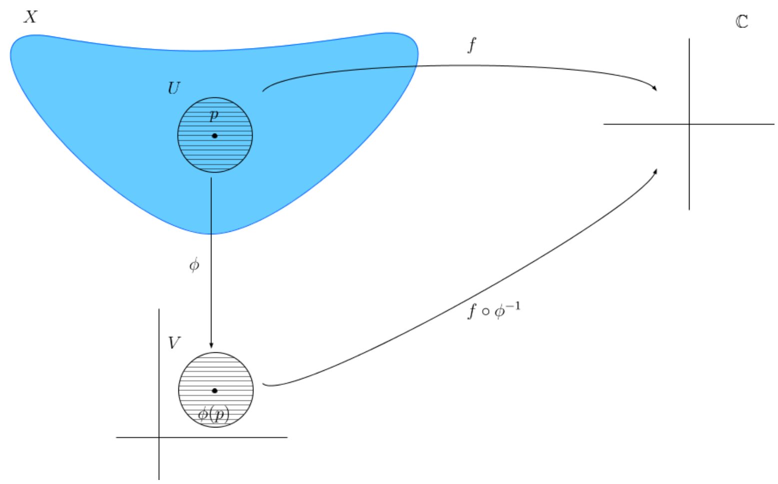
Una vez definidos nuestros objetos de interés, superficies de Riemann, el siguiente paso es considerar aplicaciones "adecuadas" entre ellos. Lo natural, en este caso, es definir aplicaciones que sean holomorfas.

Funciones holomorfas

Definición: Sean X una superficie de Riemann, $f : X \to \mathbb{C}$ una función y $p \in X$, diremos que *f es holomorfa en p*, si existe una carta $\phi : U \to V$ en X, con $p \in U$, tal que la composición:

$$f \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{C}$$

es holomorfa en $\phi(p)$, en el sentido usual de variable compleja.
Si f está definida en un abierto $W \subset X$, entonces decimos que *f es holomorfa en W*, si es holomorfa en cada punto de W.



Lema 2.1 *La definición de arriba no depende de la carta elegida.*

Demostración:

Sean (ϕ_1, U_1) y (ϕ_2, U_2) dos cartas tales que $p \in U_1 \cap U_2$ y supongamos que $f \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Notemos que:

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}),$$

es decir, $f \circ \phi_2^{-1}$ es composición de dos funciones holomorfas. Por lo tanto, $f \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(p)$. ■

Ejercicio:

I. Cualquier carta de una superficie de Riemann X es una función holomorfa.

II. Si f, g son holomorfas en un punto $p \in X$, así son $f \pm g$, fg y f/g, siempre que $g(p) \neq 0$.

III. $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ es holomorfa en ∞ si y solo si $f(1/z)$ es holomorfa en 0. En particular, una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ es holomorfa en ∞ si y solo si $\operatorname{gr} p(x) \leq \operatorname{gr} q(x)$.

Ejemplo: Sea X una curva plana afín no singular definida por un polinomio $f(z, w)$, entonces las proyecciones:

$$\pi_1 : X \to \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \pi_2 : X \to \mathbb{C},$$

dadas por:

$$(z,w) \longmapsto z \qquad\qquad (z,w) \longmapsto w,$$

respectivamente, son holomorfas.
Solución: Verifiquemos que π_1 es holomorfa: sea $p = (a,b) \in X$ y consideremos una carta (π_p, U_p) alrededor de p, entonces los puntos de U_p son de la forma $(a, g(a))$, con g holomorfa (o bien $(h(b), b)$, con h holomorfa) y tenemos:

$$(\pi_1 \circ \pi_p^{-1})(\pi_p(p)) = \pi_1(p) = \begin{cases} a \\ h(b) \end{cases},$$

en cualquier caso, $\pi_1 \circ \pi_p^{-1}$ es holomorfa.
Análogamente, π_2 es holomorfa. $\diamondsuit$

Ejercicio: Cualquier función polinomial restringida a una curva plana afín no singular es holomorfa.

Si $U \subset X$ es un abierto, al conjunto de todas las funciones holomorfas sobre U lo denotaremos por $\mathcal{O}(U)$, es decir:

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} | f \text{ es holomorfa}\}.$$

Ejercicio: $\mathcal{O}(U)$ es una $\mathbb{C}-$álgebra.

Funciones meromorfas

Así como en el plano complejo, puede suceder que una función sea holomorfa en una vecindad agujereada de un punto p, consideremos la situación análoga sobre una superficie de Riemann X.

Definición: Sea f una función holomorfa en una vecindad agujereada de $p \in X$, diremos que:

I. *f tiene una singularidad removible en p*, si existe una carta (ϕ, U) tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\phi(p)$;

II. *f tiene un polo en p*, si existe una carta (ϕ, U) tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene un polo en $\phi(p)$;

III. *f tiene una singularidad esencial en p*, si existe una carta (ϕ, U) tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $\phi(p)$.

Ejercicio: Las definiciones de arriba no dependen de la carta elegida.

Definición: Sea f una función holomorfa en una vecindad agujereada de $p \in X$, diremos que f *es meromorfa en* p, si es holomorfa, tiene una singularidad removible o tiene un polo en p.

Ejemplo:

I. Sean W un abierto de X y $f, g \in \mathcal{O}(W)$, con g no idénticamente cero. Si $p \in W$, entonces f/g es meromorfa en p.
Solución: Sea (ϕ, U) una carta de X, con $p \in U$, notemos que:

$$\frac{f}{g} \circ \phi^{-1} = \frac{f \circ \phi^{-1}}{g \circ \phi^{-1}}$$

es cociente de dos funciones holomorfas, con $g \circ \phi^{-1} \neq 0$, por lo cual es meromorfa en $\phi(p)$.

II. Sea X una curva plana afín, entonces cualquier función racional restringida a X es meromorfa.

$\diamondsuit$

Sean f una función holomorfa en una vecindad agujereada de $p \in X$ y (ϕ, U) una carta de X tal que $p \in U$, considerando $z = \phi(x)$, para $x \in U$, tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa alrededor de $z_0 = \phi(p)$, entonces podemos escribir podemos escribirla como serie de Laurent:

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n,$$

a esta expresión la llamaremos *la serie de Laurent de f alrededor de p, con respecto a ϕ.*

Ejercicio:

I. f tiene una singularidad removible en p si y solo si alguna de sus series de Laurent no tiene potencias negativas.

II. f tiene un polo en p si y solo si alguna de sus series de Laurent no tiene un número finito (no cero) de potencias negativas.

III. f tiene una singularidad esencial en p si y solo si alguna de sus series de Laurent tiene infinitas potencias negativas.

Obviamente, dicha serie depende de la carta elegida, sin embargo, un dato importante no dependerá de ésta.

Lema 2.2 *Sea f una función meromorfa en p, si (ϕ, U) y (ψ, V) son cartas de X, con $p \in U \cap V$, tales que las series de Laurent, respecto a éstas, son:*

$$\sum_{n \geq n_0} c_n (z - z_0)^n \quad y \quad \sum_{m \geq m_0} d_m (w - w_0)^m,$$

con $n_0, m_0 \neq 0$, entonces $n_0 = m_0$.

Demostración:

Sabemos que la función $T = \phi^{-1} \circ \psi$, la cual expresa a w como función de z, es holomorfa. Como T es invertible, $T'(z_0) \neq 0$, por lo cual, su serie de Taylor es de la forma:

$$\begin{aligned} w = T(z) &= T(z_0) + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{con } a_1 \neq 0, \\ &= w_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{con } a_1 \neq 0, \end{aligned}$$

es decir:

$$w - w_0 = \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{con } a_1 \neq 0.$$

Sustituyendo esta expresión en la serie respecto a ψ, podemos ver que el término de potencia menor es:

$$d_{m_0} a_1^{m_0} (z - z_0)^{m_0},$$

por lo tanto, $n_0 = m_0$. ∎

Definición: Sea f una función meromorfa en p tal que, para alguna carta, la serie de Laurent de f, alrededor de p, es $\sum_n c_n (z - z_0)^n$, definimos *el* *orden de f en p* como el mínimo exponente negativo que aparece en dicha serie:

$$\mathrm{ord}_p(f) = \mathrm{mín}\{n : n \neq 0\}.$$

Observemos que:

$$\mathrm{ord}_p(f) \begin{cases} > 0, & \text{si } p \text{ es un cero de } f; \\ < 0, & \text{si } p \text{ es un polo de } f; \\ = 0, & \text{si } p \text{ no es cero ni polo de } f. \end{cases}$$

Definición: Bajo las condiciones anteriores, diremos que:

I. *f tiene un cero de orden n en p*, si $\mathrm{ord}_p(f) = n > 0$;

II. *f tiene un polo de orden n en p*, si $\mathrm{ord}_p(f) = -n < 0$.

Ejercicio: Sean f y g funciones meromorfas en p, entonces:

I. $\mathrm{ord}_p(fg) = \mathrm{ord}_p(f) + \mathrm{ord}_p(g)$;

II. $\mathrm{ord}_p(f/g) = \mathrm{ord}_p(f) - \mathrm{ord}_p(g)$.

Ejercicio: Si $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa, entonces es racional.

Ejemplo:

I. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ una función meromorfa, entonces:

$$\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

Solución: Como f es meromorfa, por el ejercicio anterior, existen $p(z), q(z)$ polinomios tales que $f(z) = p(z)/q(z)$, digamos:

$$f(z) = c\frac{(z-a_1)^{d_1}\cdots(z-a_r)^{d_r}}{(z-b_1)^{e_1}\cdots(z-b_s)^{e_s}},$$

con los a_i's distintos de los b_j's, entonces:

$$\mathrm{ord}_p(f) = \begin{cases} d_i, & \text{si } p = a_i; \\ e_j, & \text{si } p = b_j; \\ \sum_j e_j - \sum_i d_i, & \text{si } p = \infty; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

II. Sea X la curva plana afín no singular, definida por el polinomio $f(x,y)$. Sabemos que cualquier función polinomial $g(x,y)$, restringida a X es holomorfa, luego cualquier función racional $p(x,y)/q(x,y)$ es meromorfa en X, siempre que $q(x,y)$ no sea idénticamente cero en X.
Obviamente, si $f(x,y)$ divide a $q(x,y)$, q se anula en todo X, e inversamente también, si q se anula en todo X, entonces f divide a q^2.
En resumen, p/q es una función meromorfa en X si y sólo si f no divide a q.

$\diamondsuit$

Hay muchos resultados que se heredan de lo que sucede con funciones de variable compleja. A continuación enunciamos algunos, y la prueba se deja como ejercicio.

Teorema 2.1 *Sean X una superficie de Riemann y $f : X \to \mathbb{C}$ una función meromorfa no idénticamente cero. entonces:*

I. *los ceros y polos forman un conjunto discreto de X;*

II. *si X es compacta, f tiene un número finito de ceros y polos;*

Teorema 2.2 *Sean X una superficie de Riemann y $f : X \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.*

I. *Si existe $p \in X$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$, para todo $x \in X$, entonces f es constante.*

II. *Si X es compacta, entonces f es constante.*

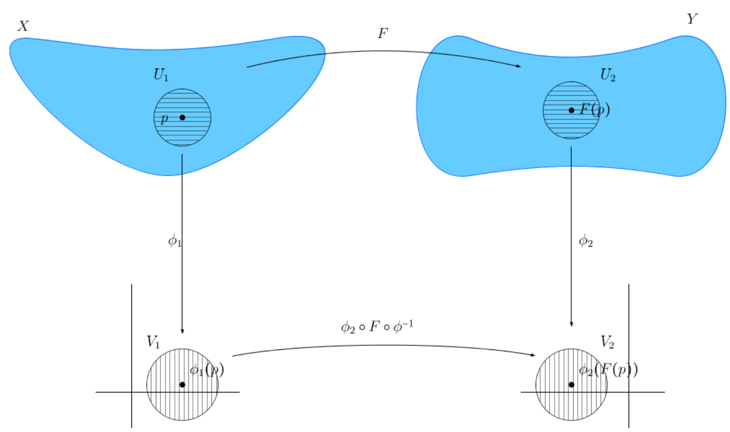
Aplicaciones holomorfas

Definición: Sean X y Y superficies de Riemann, $F : X \to Y$ una función y $p \in X$, diremos que F *es holomorfa en* p, si existen cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$

[2]Esto es una consecuencia del Teorema de los Ceros de Hilbert: Sean F un campo algebraicamente cerrado y $g, h_1 \dots, h_m \in F[x_1, \dots, x_n]$ tales que g se anula en el conjunto de los ceros comunes de los h_i's, entonces existen $g_1, \dots, g_m \in F[x_1, \dots, x_n]$ tales que:

$$g = g_1 h_1 + \cdots + g_m h_m.$$

en X, con $p \in U_1$, y $\phi_2 : U_2 \to V_2$, en Y, con $F(p) \in U_2$, tales que la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ es holomorfa en $\phi_1(p)$, en el sentido usual de variable compleja.
Si F está definida sobre un conjunto abierto $W \subset X$, entonces decimos que F es holomorfa en W, si F es holomorfa en cada punto de W.
Si F es holomorfa, diremos que F *es un isomorfismo*, si es biyectiva y su inversa es holomorfa.



Ejercicio: La definición anterior es independientemente del par de cartas que se elijan.

Es claro que cualquier función holomorfa es una aplicación holomorfa, en particular, una carta es una aplicación holomorfa.

Ejemplo: La función identidad $1_X : X \to X$ es holomorfa.
Solución: Sean $p \in X$ y (ϕ, U) una carta de X, con $p \in U$, entonces:

$$(\phi \circ F \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \phi(p),$$

es decir, $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ es la identidad en $\phi(U) \subset \mathbb{C}$, la cual obviamente es holomorfa. $\diamondsuit$

Ejercicio:

I. La composición de aplicaciones holomorfas es holomorfa.

II. La composición de una aplicación holomorfa con una función holomorfa es una función holomorfa.

III. La composición de una aplicación holomorfa con una función meromorfa es una función meromorfa. (Siempre que la imagen de la aplicación no esté contenida en el conjunto de polos de la función.)

Para este caso también tenemos muchos resultados heredados de la funciones holomorfas de variable compleja, como los siguientes:

1. *Una aplicación holomorfa, no constante es abierta.*

2. *Una aplicación holomorfa inyectiva es un isomorfismo entre el dominio y su imagen.*

3. *Si dos aplicaciones holomorfas entre X y Y coinciden en un abierto de X, entonces son iguales.*

4. *Si $F : X \to Y$ es holomorfa, no constante, entonces $F^{-1}(y) \subset X$ es discreto. En particular, si X es compacta, $F^{-1}(y)$ es finito.*

5. *Si $F : X \to Y$ es holomorfa, no constante, y X es compacta, entonces F es sobre y Y es compacta.*
   Solución: Sabemos que $F(X)$ es abierto en Y, pues F es abierta, también es un compacto, ya que X es compacta, en particular es un conjunto cerrado, luego $F(X) = Y$. Por lo tanto, F es sobre y Y es compacta.

Una propiedad que posee una aplicación holomorfa, es la siguiente, que nos dice que la aplicación localmente se comporta como una función potencia.

Proposición 2.1 ***(Forma Local Normal)*** *Sean X y Y superficies de Riemann, $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante y $p \in X$, entonces existe un único $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cada carta $\phi_2 : U_2 \to V_2$ de Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ de X, centrada en p, tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

La idea de la demostración de esta proposición es como sigue: se escribe la expresión en serie de Taylor de la función $T(w) = \phi_2(F(\phi_1^{-1}(w)))$, donde ϕ_2 es una carta en Y alrededor de $F(p)$ y ϕ_1 una en X alrededor de p, el entero m es precisamente la menor potencia que aparece en esta serie. (Para más detalles, ver página 44 de [Mi].)

Definición: Bajo las condiciones de arriba, definimos *la multiplicidad de F en p* como el entero m dado por la proposición anterior y la denotamos por $\mathrm{mult}_p(F)$.

Notemos que para todo punto $p \in X$ se cumple que $\mathrm{mult}_p(F) \geq 1$.

Ejemplo: Si $\phi : U \to V$ es una carta, entonces $\mathrm{mult}_p(\phi) = 1$, para todo $p \in U$. $\diamondsuit$

Definición: Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante.

I. Diremos que $p \in X$ *es un punto de ramificación de F*, si $\mathrm{mult}_p(F) \geq 2$.

II. Si $q \in Y$ es imagen de algún punto de ramificación de F, diremos que *q es un punto rama de F*.

Proposición 2.2 *Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante. Para cada $y \in Y$, consideremos el número:*

$$\mathrm{gr}_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \mathrm{mult}_p(F),$$

entonces $\mathrm{gr}_y(F)$ es constante e independiente de y.

Bosquejo de demostración:

> La idea es probar que la función $y \mapsto \mathrm{gr}_y(F)$ es una función localmente constante de Y a $\mathbb{Z}$. Como Y es conexa, una función localmente constante será constante. Para ello consideramos el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y la función potencia $f : D \to D$ dada por $f(z) = z^m$ para algún $m \geq 1$.
> Dicha función f es holomorfa, sobreyectiva, su único punto de ramificación es $z = 0$ (donde la multiplicidad es m), los demás puntos tienen multiplicidad 1, además para un $w \in D, w \neq 0$,

existen m preimágenes (las m raíces de w) cada una de multiplicidad 1, por lo que f tiene la propiedad de que la suma de las multiplicidades de los puntos de las preimágenes es constante e igual a m. Y como F localmente se comporta como funciones potencia como la de arriba, la prueba está completa. ■

Así, si $F : X \to Y$ es como en la proposición anterior, entonces ésta nos asegura que la siguiente definición tiene sentido:

Definición: Bajo las condiciones anteriores, definimos *el grado de F* como el entero $\mathrm{gr}_y(F)$ de la proposición anterior, para cualquier $y \in Y$ y lo denotamos por $\mathrm{gr}(F)$.

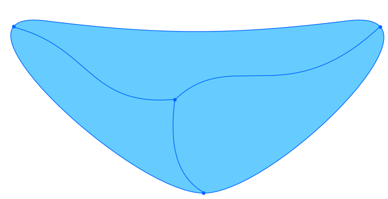
Corolario 2.1 *Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ holomorfa, entonces F es un isomorfismo si y sólo si es de grado uno.*

3. La característica de Euler de una 2−variedad

La característica de Euler es una propiedad topológica que, en un principio, era una fórmula asociada a poliedros: en cualquier poliedro el número de vértices, v, más el número de caras, c, era dos más que el número de aristas, a:

$$v - a + c = 2.$$

Definición: Sea S una 2−variedad, *una triangulación de S* es una descomposición de S en subconjuntos cerrados, cada uno de ellos homeomorfo a un triángulo, y tal que cualesquiera dos de ellos, son ajenos, se intersecan en un único vértice o bien en una única arista.



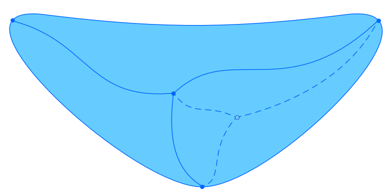
Definición: Sea T una triangulación de S con v vértices, a aristas y t triángulos, definimos *la característica Euler de S (con respecto a la triangulación T)*, como el entero:

$$e(S) = v - a + t.$$

Una de las principales propiedades de la característica de Euler es que no depende de la triangulación tomada. Sea T una triangulación de S. *Un refinamiento elemental de T* es otra triangulación de S que se obtiene de alguna de las formas siguientes:

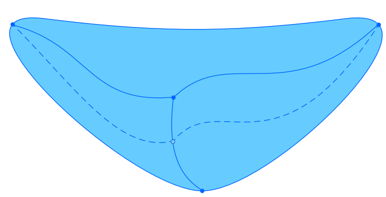
- Aumentando un vértice en algún punto del interior de un triángulo y tres aristas desde los vértices al nuevo vértice. Con ello se reemplaza un triángulo por tres triángulos, lo cual aumenta un vértice, tres aristas y dos triángulos. Observemos que:

$$(v+1) - (a+3) + (t+2) = v - a + t = e(S).$$



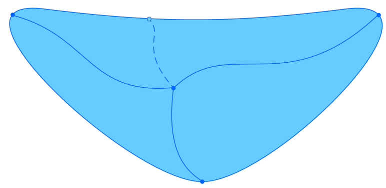
- Al tomar dos triángulos vecinos con una arista común A, ponemos un vértice en algún punto del interior de A y dos aristas de cada uno de los vértices opuestos de los dos triángulos. Esencialmente esto biseca a los dos triángulos, aumentando un vértice, tres aristas y dos triángulos. Así:

$$(v+1) - (a+3) + (t+2) = v - a + t = e(S).$$



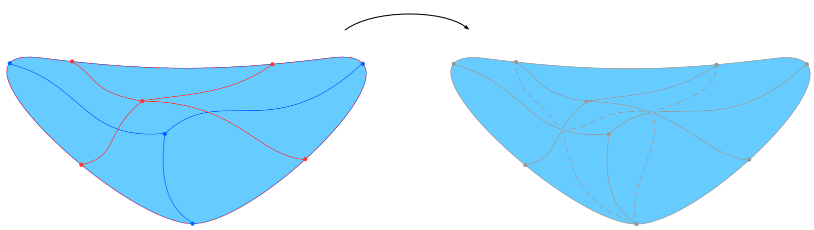
- En una 2−variedad con frontera, simplemente bisecamos un triángulo por una arista que forme parte de la frontera. Con esto se suman un vértice, dos aristas y un triángulo. Así:

$$(v+1) - (a+2) + (t+1) = v - a + t = e(S).$$



Con base en lo anterior, podemos observar que estas tres operaciones no afectan la característica de Euler.

Un refinamiento se obtiene por una sucesión de refinamientos elementales. Por lo tanto, una triangulación y cualquier refinamiento de ésta da la misma característica de Euler para la superficie. Además, cualesquiera dos triangulaciones de una 2−variedad compacta (incluso con frontera), tiene un refinamiento común. Esto se puede ver al sobreponer ambas triangulaciones en la superficie y completar con los vértices y aristas que hagan falta, con lo cual obtenemos un refinamiento común de éstas. De donde, la característica de Euler está bien definida.

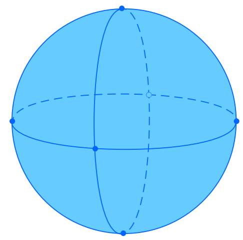


Como la característica de Euler es invariante bajo refinamientos y cualesquiera dos triangulaciones tienen un refinamiento común, entonces podemos considerar cualquier triangulación para calcular la característica de Euler de una 2−variedad.

Ejemplo:

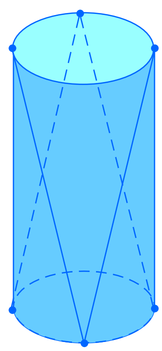
I. Si S es una esfera, entonces con la siguiente triangulación obtenemos:

$$e(S) = v - a + t = 6 - 12 + 8 = 2.$$



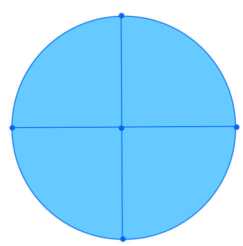
II. Si C es un cilindro, entonces considerando la siguiente triangulación obtenemos:

$$e(C) = v - a + t = 6 - 12 + 6 = 0.$$



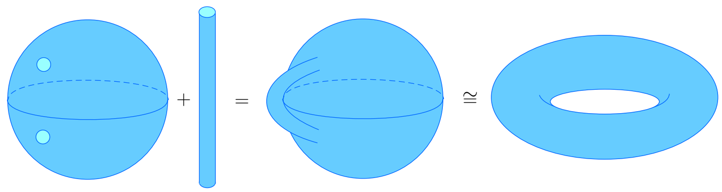
III. Si D es un disco cerrado, entonces con la siguiente triangulación tenemos:

$$e(D) = v - a + t = 5 - 8 + 4 = 1.$$



Como topológicamente $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, de topología sabemos que toda $2-$variedad compacta y orientable X es homeomorfa a una esfera con "asas", el número de asas es lo que llamamos *el género topológico de* X.

Para incrementar el género de una superficie en uno, basta con quitar dos discos (con frontera) y pegar un cilindro sobre ellos, lo cual lo podemos interpretar como poner un asa. Al quitar los dos discos la característica de Euler baja 1 por cada uno de ellos, en total 2 y al pegar el cilindro ésta no se ve afectada. De esta manera, la característica de Euler disminuye 2 cada vez que aumentamos un asa.



Lo anterior lo podemos usar para probar por inducción el siguiente resultado:

Proposición 3.1 *Sea S una $2-$variedad de género g, compacta, orientable y sin frontera, entonces la característica de Euler de S es $2-2g$.*

4. La fórmula de Riemann-Hurwitz

La fórmula de Riemann-Hurwitz es muy importante y a menudo utilizada en la teoría de superficies de Riemann, es una relación determinada por Riemann y demostrada por Hurwitz, ésta conecta el grado de una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas con la característica de Euler y el número de puntos de ramificación de la aplicación.

Teorema 4.1 ***(Fórmula de Riemann-Hurwitz)*** *Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa y no constante, entonces:*

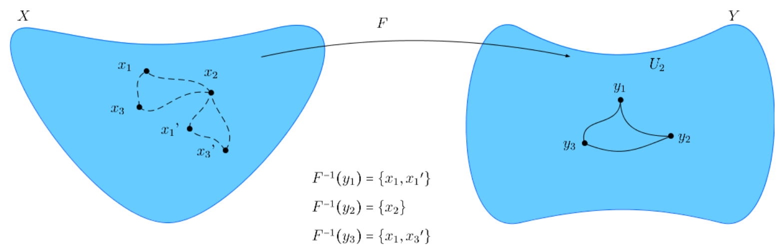
$$2g_X - 2 = \mathrm{gr}(F)(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1],$$

donde g_X y g_Y son los géneros de X y de Y, respectivamente.

Demostración:

Como X es compacta, el conjunto de puntos de ramificación es finito, luego la suma que aparece en la fórmula es finita, pues los

únicos puntos que cuentan son los de ramificación, ya que para los demás se tiene $\mathrm{mult}_p(F) = 1$.
Tomemos una triangulación de Y de tal forma que cada punto rama de F sea un vértice y supongamos que hay v vértices, a aristas y t triángulos.
Ahora "levantamos" esta triangulación a una para X vía F, es decir, construimos una triangulación para X de tal manera que los vértices sean las preimágenes de los vértices de la triangulación dada para Y y las aristas se toman de las correspondientes aristas en Y:



Supongamos que la triangulación de X tiene v' vértices, a' aristas y t' triángulos. Como no hay puntos de ramificación en el interior de cualquier triángulo, entonces cada triángulo de Y se levanta a $\mathrm{gr}(F)$ triángulos en X. De esta manera, $t' = \mathrm{gr}(F)t$ y de manera similar $a' = \mathrm{gr}(F)a$. Pero no ocurre lo mismo con los vértices v', pues si fijamos un vértice $q \in Y$, el número de preimágenes de q en X es $|F^{-1}(q)|$, que podemos escribir como sigue:

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = \mathrm{gr}(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \mathrm{mult}_p(F)]$$

ya que quitaremos algunos puntos, dependiendo de la multiplicidad del punto rama. Así, el número total de preimágenes de vértices de Y, el cual es el número v' de vértices de X es:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\substack{\text{vértices} \\ q \in Y}} \left(\mathrm{gr}(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \mathrm{mult}_p(F)] \right) \\ &= \mathrm{gr}(F)v + \sum_{\substack{\text{vértices} \\ q \in Y}} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \mathrm{mult}_p(F)]. \end{aligned}$$

Además sabemos que $2-2g_X = a'-v'+t'$. Sustituyendo nuestros valores obtenemos:

$$\begin{aligned} 2-2g_X &= \mathrm{gr}(F)a - \mathrm{gr}(F)v + \sum_{\substack{\text{vértices} \\ q\in Y}} \sum_{p\in F^{-1}(q)} [1-\mathrm{mult}_p(F)] + \mathrm{gr}(F)t \\ &= \mathrm{gr}(F)(a-v+t) + \sum_{p\in X} [1-\mathrm{mult}_p(F)] \\ &= \mathrm{gr}(F)(2-2g_Y) + \sum_{p\in X} [1-\mathrm{mult}_p(F)]. \end{aligned}$$

■

Ejemplo: Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante, entonces:

$$g_Y \leq g_X.$$

Solución: Como $\mathrm{gr}(F) \geq 1$, la fórmula de Riemann-Hurwitz implica:

$$2g_X - 2 \geq (2g_Y - 2) + \sum_{p\in X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1],$$

luego:

$$2g_X - 2g_Y \geq \sum_{p\in X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1].$$

Además, como $\mathrm{mult}_p(F) \geq 1$, para todo $p \in X$, entonces:

$$\sum_{p\in X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1] \geq 0,$$

de donde, $2g_X - 2g_Y \geq 0$ y por lo tanto, $g_X \geq g_Y$. ♢

Referencias

[A-S] Ahlfors Lars, Sario Leo; *Riemann Surfaces*. Princeton Math. Series, vol. 2, 1960.

[Ar] Armstrong, Mark A.; *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics, 1983.

[G-H] Griffiths Phillip, Harris Joseph; *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley-Interscience Publication, 1978.

[Fo] Forster,Otto; *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer-Verlag, 1981.

[Ki] Kirwan, Frances; *Complex Algebraic Curves.* Cambridge University Press, 1992.

[Mi] Miranda, Rick; *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society, 1995.

[Sp] Springer, George; *Introduction to Riemann Surfaces.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1957.