CURVAS ALGEBRAICAS Y LA PREGUNTA DE HALPHEN

CÉSAR LOZANO HUERTA

Introducción

Jakob Steiner fue un matemático suizo del siglo XIX, que en vida se propuso compilar y modernizar la geometría sintética, conocida desde el tiempo de los griegos del siglo IV a. de C. A su muerte, su testamento dotaba de 8 000 táleros[1] de forma bianual al autor del mejor trabajo en geometría abordado sintéticamente; es decir, sin el uso de coordenadas. De este modo nació el Premio Steiner que otorgaba la Universidad de Berlín. En 1882 este premio se dividió entre Max Noether y Henri Halphen por su investigación sobre curvas algebraicas. Halphen, en un tratado de 200 páginas [1], aborda el problema sobre la existencia de curvas en el espacio proyectivo de dimensión 3, mismo que tiene continuidad hasta nuestros días y que nos servirá de guía para presentar las ideas del presente artículo. Enunciaremos la pregunta central de [1], que llamaremos pregunta de Halphen, luego explicaremos la terminología y la geometría del problema. La pregunta, escrita en un lenguaje moderno, dice:

¿Qué pares de números (d, g) ocurren como el grado y género de una curva algebraica suave en el espacio proyectivo de dimensión 3?

Para apreciar la geometría detrás de esta pregunta, necesitamos precisar, qué es una curva algebraica y qué son el grado y el género. Primero, contestaremos estas tres cuestiones con cierta generalidad, y así responderemos burdamente la pregunta de Halphen. Al momento de la publicación de [1], no existía el concepto de curva algebraica abstracta. Los geómetras estudiaban a las curvas algebraicas encajadas en un espacio proyectivo, y buscaban clasificarlas; de ahí la relevancia de la pregunta central de [1]. Al intentar clasificar a las curvas encajadas, el género es un invariante intrínseco, es decir, no depende del encaje y por ende es importante saber calcularlo en ejemplos concretos. En este escrito calcularemos explícitamente el género de curvas en el plano proyectivo y en ejemplos particulares de curvas en el espacio proyectivo.

Pese a que la pregunta de Halphen se planteó, al menos, hace 130 años, la abordaremos con el lenguaje y punto de vista de la teoría de esquemas. No definiremos formalmente lo que es un esquema, pero uno de los objetivos de este texto es ilustrar un aspecto central de dicha teoría en el caso de curvas, el cual es: estudiar la geometría de una curva, o de una familia de ellas, examinando objetos puramente algebraicos. Por tanto, asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos de anillo de polinomios y sus ideales.

[1] Ocho años después de su muerte el tálero se remplazó por el marco alemán a una tasa de cambio de 1 tálero = 3 marcos alemanes. 8 000 táleros actualmente serían 6 000 dólares norteamericanos apróximadamente.

1. Para fijar ideas

El álgebra lineal se ocupa de estudiar las características del conjunto solución de una colección de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Aquí, los coeficientes a_{ij} pertenecen a un campo $\mathbb{K}$, y el conjunto solución es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$.

La geometría algebraica se ocupa del caso general: las características del conjunto solución de una colección de ecuaciones como

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde cada f_r es un polinomio de n variables de grado arbitrario con coeficientes en el campo $\mathbb{K}$. A dicho conjunto solución lo llamaremos conjunto algebraico y lo denotaremos por $V(f_1, \ldots, f_m)$.

A diferencia del caso donde los polinomios tienen grado 1, el conjunto solución de las ecuaciones en (1) no es un espacio vectorial, y además es sensible a las características algebraicas del campo $\mathbb{K}$ al que pertenecen los coeficientes. Por simplicidad, trabajaremos con el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. No obstante, dado que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2, usar números complejos implica considerar espacios de dimensión real 2, 4 y mayores.

Al estudiar las soluciones de ecuaciones como las que aparecen en (1), las preguntas fundamentales que surgen son: ¿qué tipo de conjunto forman las soluciones?, ¿es un conjunto finito?, si éste no es finito ¿es un conjunto continuo?, ¿de qué dimensión? Nos enfocaremos en entender el conjunto solución de una colección de ecuaciones del tipo (1) cuando éste tenga dimensión 1 sobre los complejos; a este conjunto le llamemos curva. ¡Ojo! No hemos dicho aún qué es la dimensión de un conjunto solución; lo diremos más adelante usando la Función de Hilbert. De momento, algo más fundamental es comentar dónde habita el conjunto solución $V(f_1, \ldots, f_m)$. Dado que nos interesa aprovechar las herramientas de la geometría proyectiva, estudiaremos el caso cuando dicho conjunto es un subconjunto del espacio proyectivo de dimensión n, el cual denotamos por $\mathbb{P}^n$. Esto último implica que sólo estudiaremos conjuntos algebraicos $V(f_1, \ldots, f_m)$, donde los polinomios f_r son homogéneos[2].

Resumiendo, estudiaremos el conjunto

$$V(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{P}^n,$$

cuando éste tiene dimensión 1, y cada $f_r \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es un polinomio homogéneo. La ventaja de estudiar curvas contenidas en $\mathbb{P}^n$ es que las podemos caracterizar de manera burda, usando sólo dos números enteros: el grado y el género.

[2]Por definición, f es homogéneo de grado d si $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Además, la geometría algebraica que nos atañe estudia dos tipos de objetos: uno geométrico (conjunto solución) y otro algebraico (las ecuaciones). El primero, pertenece a un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$, el segundo a un anillo de polinomios, por ejemplo $\mathbb{C}[x, y, z, w]$. En este texto definiremos invariantes para el objeto geométrico en términos del objeto algebraico.

2. Curvas en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$

Como primer ejemplo concreto estudiaremos curvas planas. En esta sección, calcularemos explícitamente su género y una versión de espacio tangente. Estas curvas se llaman planas porque están contenidas en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$, el cual tiene dimensión 2 sobre los complejos, pero ¡dimensión 4 sobre los reales! Este espacio posee coordenadas globales $[x : y : z]$ que están sujetas a la condición $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ para todo número complejo $\lambda \neq 0$ y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Por ejemplo, $[1 : 2 : 3]$ y $[2 : 4 : 6]$ son coordenadas del mismo punto en $\mathbb{P}^2$. Luego, para $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$, se define

$$\mathbb{P}^2 := \{[x : y : z] \mid (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

Una curva plana está definida por una ecuación en las coordenadas de $\mathbb{P}^2$. Es decir, sea $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio de tres variables con coeficientes complejos, homogéneo de grado d. Definimos una *curva algebraica plana* C como el conjunto de ceros de uno de estos polinomios:

$$C = \{[x : y : z] \ \in \mathbb{P}^2 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

El grado de la curva C se define como el grado del polinomio f. Escribimos $C = V(f)$ cuando deseamos hacer referencia explícita al polinomio que define la curva.

Antes de definir formalmente el género, haremos un comentario sobre la "forma" de las curvas que éste determina. Las curvas planas suaves, y de hecho todas las curvas suaves, son compactas, conexas, de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, topológicamente, sólo tienen un invariante: el género. El género de una curva C es un número difícil de definir, pero muy fácil de imaginar. He aquí dos curvas de género 2 y 3, respectivamente:

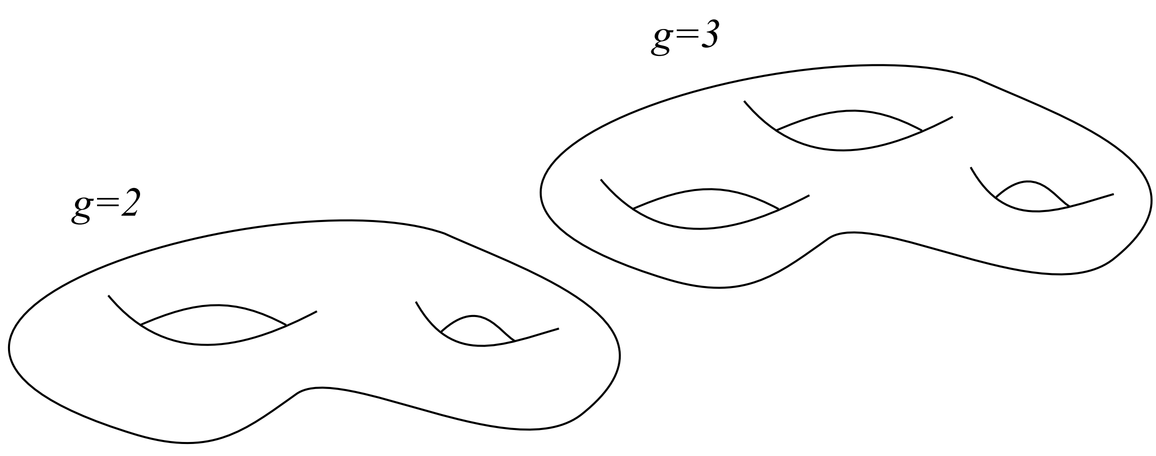

Figura 1. Curvas de género 2 y género 3.

Esta imagen nos deja más clara la idea de lo que significa (topológicamente) una curva suave de género 2 o 3 – salvavidas para 2 o 3 personas, respectivamente. De esta idea intuitiva, podemos concluir que el género de una curva suave tiene que ser al menos cero; como la esfera, la cual es, en efecto, la curva de menor género.

Otro concepto fácil de imaginar, y dependiendo del caso sencillo de definir, es el de suavidad. Una curva plana $C = V(f)$ es suave en un punto $p \in C$ si la *línea tangente* a C en $p = [p_1 : p_2 : p_3]$ está bien definida. Ésta última se define como:

$$\frac{df}{dx}(p)(x - p_1) + \frac{df}{dy}(p)(y - p_2) + \frac{df}{dz}(p)(z - p_3) = 0.$$

Lo que sigue es la parte técnica, pues definiremos formalmente el género de una curva plana. El lector debe advertir que este número, el cual posee información geométrica, se definirá usando propiedades de los polinomios. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio de tres variables homogéneo de grado d. Consideremos el anillo cociente $R/\langle f\rangle$, donde $\langle f\rangle$ denota el ideal generado por f. Observemos que los elementos del anillo R, al igual que los del anillo cociente $R/\langle f\rangle$, los podemos distingir por su grado. La función que contabiliza los elementos que hay en cada grado tiene nombre propio: Función de Hilbert. Por ejemplo, en el anillo R hay tres monomios de grado 1, $R_1 = (x, y, z)$, y dado todos los polinomios de grado 1 son combinaciones lineales en x, y y z, entonces la Función de Hilbert toma el valor $H_R(1) = \dim_{\mathbb{C}} R_1 = 3$. Similarmente en grado 2, el anillo R contiene seis monomios $R_2 = (x^2, y^2, xy, \dots)$ y todos los demás son combinaciones lineales de éstos, luego $H_R(2) = 6$. En general, $H_R(m)$ es igual al número de monomios en grado m en R, que en este caso es $H_R(m) = \dim_{\mathbb{C}} R_m = \frac{1}{2}(m+2)(m+1)$. Si volvemos a contar, ahora para el cociente $R/\langle f\rangle$, la función que nos dice la dimensión de cada componente homogénea de grado m del anillo cociente es:

$$H_C(m) := \dim_{\mathbb{C}}(R/\langle f\rangle)_m, \tag{2}$$

y en este caso, el *género* de la curva $C \subset \mathbb{P}^2$ (no necesariamente suave), lo definimos como $g(C) := 1 - H_C(0)$, donde a H_C se le llama Función de Hilbert de C. Un resultado crucial, que le debemos a David Hilbert, es que para valores grandes de m, la función polinomial que toma los valores de $H_C(m)$ es única [3].

No es obvio que la noción de género que expresa la figura 1 y el número que acabamos de definir coinciden. El lector puede (y debe) consultar [4] para una prueba geométrica de este hecho.

Una de las ventajas de la definición $g(C) = 1 - H_C(0)$ es que sólo depende de H_C, la Función de Hilbert de C la cual, en el caso de curvas planas, se calcula a continuación.

Hemos calculado arriba la función $H_R(m)$, y de manera similar podemos calcular la función $H_f(m)$. Esta última es la función que contabiliza la dimensión del espacio de polinomios de grado m en el ideal $\langle f\rangle$. Dicho espacio de polinomios es generado por los monomios de grado $m - d$, y contar estos monomios es una variante de la cuenta hecha para obtener $H_R(m)$. Por única vez, usaremos la sucesión de R-módulos

$$0 \to \langle f\rangle \xrightarrow{f} R \to R/\langle f\rangle \to 0,$$

pues ésta implica que $H_R = H_f + H_C$, y por tanto obtenemos:

$$\begin{aligned} H_C(m) =& \{\text{monomios de grado } m \text{ en } R\} - \{\text{polinomios de grado } m \text{ en el ideal } \langle f\rangle\} \\ =& \binom{2+m}{2} - \binom{2+m-d}{2}. \end{aligned}$$

De este cálculo, se sigue que el género g de una curva plana C de grado d es:

$$g = 1 - H_C(0) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \tag{3}$$

De (3) podemos concluir: ¡no existen curvas planas de género 2! Más aún, si fijamos el grado de la curva, entonces su género está determinado. No hay misterio sobre los pares (d, g) que ocurren como el grado y género de las curvas planas. Esto contesta satisfactoriamente la pregunta de Halphen en el plano.

3. Curvas en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$

En esta sección abordaremos la pregunta de Halphen para curvas contenidas en $\mathbb{P}^3$. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ tiene coordenadas globales $[x : y : z : w]$ y a diferencia de $\mathbb{P}^2$, todas las curvas algebraicas se pueden encajar en él [3]. Este espacio de dimensión 3 sobre los complejos, ¡tiene dimensión 6 sobre los reales! En $\mathbb{P}^3$ una curva está definida al menos por dos ecuaciónes y por tanto no podemos definir el grado como lo hicimos para curvas planas. Además, dos curvas del mismo grado pueden tener géneros distintos (adelante citaremos un ejemplo), por ende en $\mathbb{P}^3$ no existe una ecuación como (3). Resulta que la generalización de estos invariantes yace en la Funcion de Hilbert.

En este momento nos enfrentamos a las preguntas: ¿qué es una curva en $\mathbb{P}^3$? y ¿cómo definimos su grado y género? Responderemos ambas de un solo brochazo con la ayuda de la Función de Hilbert –lo que significa que contestaremos examinando un objeto algebraico.

Lo que sigue es técnico, pues definiremos lo que es una curva algebraica. Nos auxiliaremos de la Función de Hilbert generalizadon la definión (2). Dados varios polinomios homogéneos (ecuaciones) de grados arbitrarios en cuatro variables, $\{f_1, \ldots, f_k\}$, consideramos el ideal que generan $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z, w]$. Luego, definimos la Función de Hilbert de $V(f_1, \ldots, f_k)$ como:

$$H(m) := \dim_{\mathbb{C}} \left(R/\langle f_1, \ldots, f_k\rangle\right)_m .$$

Un resultado de David Hilbert [3] nos garantiza que existe un único polinomio $P(m) \in \mathbb{Q}[m]$, tal que $P(m) = H(m)$ para valores grandes de m. En la literatura, a este polinomio se le llama polinomio de Hilbert y sus coeficientes tienen información geométrica importante como lo ilustra el siguiente párrafo.

Consideraremos que el conjunto algebraico

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}^3 |\ f_1(\boldsymbol{p}) = 0, \ldots, f_k(\boldsymbol{p}) = 0\}$$

define una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ si su polinomio de Hilbert es de la forma $P_C(m) = Am+B$, con $A, B \in \mathbb{Z}$, y además C es suave. El *grado* de C se define como el número A y su *género* como $g(C) := 1 - B$. El lector debe advertir que el grado de $P_C(m)$ es la dimensón de C lo cual es un caso particular de un hecho más general [3]. No definiremos suavidad de una curva en este contexto, sin embargo este concepto formaliza la siguiente idea: una curva C es suave en $p \in C$ si el espacio tangente a C en p, que es un espacio vectorial, está bien definido y tiene dimensión compleja 1 [4]. Pese a que nuestra definición de curva incluye que ésta es suave, incluiremos la palabra suave para enfatizar.

¿Cómo se comporta el conjunto $V(f_1, \ldots, f_k)$ si omitimos la condición de suavidad? Veamos un ejemplo, el conjunto $V(xz, xw, yz, yw)$ tiene polinomio de Hilbert $P(m) = 2m + 2$ lo cual implica que es un conjunto de dimensión 1, cuyo género es -1. Además, es disconexo, pues consiste de las líneas $V(x,y)$ y $V(z,w)$, por lo tanto imponer a $V(f_1,\ldots,f_k)$ la propiedad de suavidad evita que trabajemos con conjuntos como este.

Resumiendo, el polinomio de Hilbert nos dice la dimensión, género y grado del conjunto $V(f_1,\ldots,f_k)$ sin importar si éste es suave o no. Evitaremos trabajar con casos muy complicados o redundantes (como el ejemplo de arriba), cuando estudiamos el caso suave.

La manera en la que definimos arriba el género hace que éste no dependa de la suavidad de $V(f_1,\ldots,f_k)$, ni dependa del campo $\mathbb{C}$. Esta definición además hace que el género sea constante en familias de curvas [3]. Esto último es muy importante en teoría de espacios de móduli de curvas, donde se estudian familias de curvas algebraicas. Veamos tres ejemplos.

Sea t un parámetro en el disco unitario $t \in \Delta = \{t \in \mathbb{C} : \; |t| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} C_1 &= V(w, zy^2 - x^3 + xz^2 + z^3), & P_{C_1}(m) &= 3m + 0 \\ C_2 &= V(y^2 - zx, yw - z^2, yz - xw), & P_{C_2}(m) &= 3m + 1 \\ C_t &= V(y^2 - zx, yw - z^2 + tx^2), & P_{C_t}(m) &= 4m + 0. \end{aligned}$$

Los polinomios de Hilbert aquí listados nos dicen que C_1 tiene grado 3 y género 1, mientras C_2 tiene grado 3 y género cero. Por otro lado, para todo t, el conjunto C_t tiene género 1. Si $t = 0$, es claro que $C_2 \subset C_0$. Más aún, la curva C_2 junto con la línea $L = V(y,z)$ forman C_0. El fenómeno que ocurre aquí es que C_t es suave de género 1 si $t \neq 0$ y se "quiebra" en la unión $C_0 = C_2 \cup L$, donde las componentes C_2 y L tienen cada una género cero.

A la luz de los ejemplos anteriores, reformulamos la pregunta original de Halphen: sea $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva suave de grado d, ¿cuáles son los números g que pueden ocurrir como el género de C? Las curvas C_1 y C_2 muestran que los pares $(d,g) = (3,0)$ y $(3,1)$ ocurren.

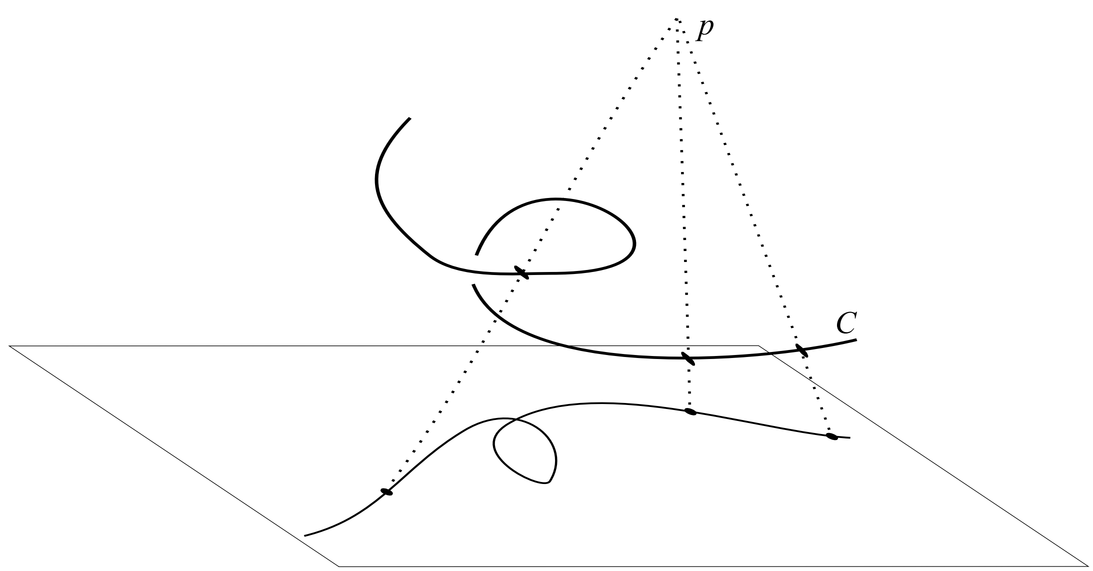

FIGURA 2. Proyección desde p de una curva C en un plano.

Supongamos $C \subset \mathbb{P}^3$ es una curva suave de grado d. Si C yace en un plano, entonces la pregunta original de Halphen la contesta la ecuación (3). Esta fórmula, sin embargo, nos dice más: el género $g(C)$ de una curva C está acotado, pues podemos proyectar dicha curva C en un plano sin cambiar su grado [2]. Esto implica que

$$g(C) \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2). \tag{4}$$

Por lo tanto, para cualquier d y $g(C) \geq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, no existe curva en $\mathbb{P}^3$ de este grado y género.

Halphen, y poco después Guido Castelnuovo, demostraron que si la curva C no está contenida en un plano, entonces $g(C)$ está sujeto a una cota más estricta. A saber,

$$g(C) \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - d + 1 & d \text{ par} \\ \frac{1}{4}(d^2-1) - d + 1 & d \text{ impar.} \end{cases} \tag{5}$$

Esto muestra que entre cero y la cota más alta, dada por (4), no todos los enteros ocurren. Es decir, entre 0 y $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \frac{1}{2}d - d + 1$ existen "huecos" para los valores de g. Por ejemplo, se sigue de (5) que no existen curvas suaves de grado 4 y género 2, como tampoco existen curvas suaves de grado 5 y género $3, 4$ o 5.

Los argumentos expuestos aquí no resuelven completamente la pregunta de Halphen pues éstos no proporcionan criterios para saber cuando un par (d, g) sí ocurre. Por ejemplo, estos métodos son insuficientes para contestar si existe una curva suave de grado 7 y género 5. Sin embargo, profundizando en estas ideas en [1] se listan todos los posibles géneros de las curvas en $\mathbb{P}^3$ de grado ≤ 20. Hasta donde tengo conocimiento, la pregunta de Halphen sigue abierta en $\mathbb{P}^n$, para $n \geq 5$.

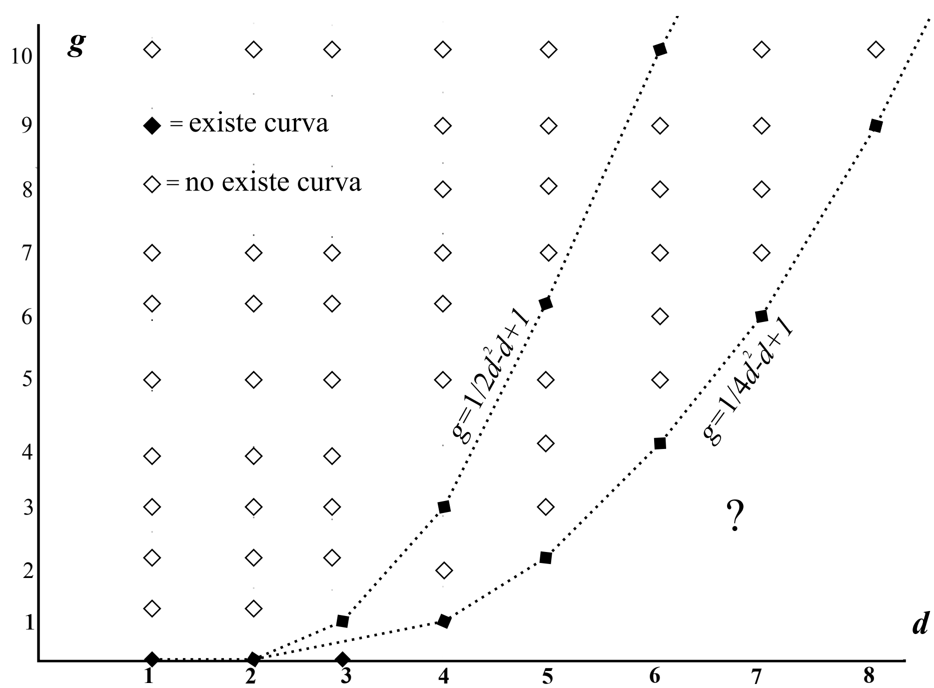

Figura 3. Curvas de grado d y género g en $\mathbb{P}^3$.

Para exponer las ideas de este artículo, usamos las coordenadas del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$; lo cual era contrario a los lineamientos originales del Premio Steiner. Después de que todos los estudiantes y seguidores de Steiner murieron, un geómetra que no hiciera uso de coordenadas era cosa difícil de hallar. Por tal razón, los lineamientos del Premio Steiner cambiaron diendo paso a técnicas más modernas (como las de Halphen), dejando poco a poco los métodos sintéticos en el olvido. Actualmente, para estudiar curvas en $\mathbb{P}^n$ se combinan aspectos tanto extrínsecos, como intrínsecos.

Agradecimientos

Este artículo se escribió gracias al financiamiento de las Cátedras CONACYT, 2014-01. Agradezco especialmente al Prof. Joe Harris por su generosidad y por introducirme en este tema. Le doy las gracias a Rosa Elisa T Hernandez Acosta de la Facultad de Ciencias de la UNAM por leer cuidadosamente los borradores de este texto y, con ello, mejorar sustancialmente el español de este artículo.

Referencias

[1] G. H. Halphen. *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques.* Journal de l'École Polytechnique, 52 (1882), 1-200.

[2] J. Harris. *Algebraic geometry: a first course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 2010.

[3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1977.

[4] D. Mumford. *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties.* Classics in Mathematics, Springer-Verlag 1976.

Instituto de Matemáticas, UNAM. Oaxaca de Juárez, Oaxaca. México

Department of Mathematics, Harvard University. Cambridge, MA. USA
E-mail address: lozano@math.harvard.edu